

# 数値くりこみによる時間遅れを含む2階微分方程式解の安定性解析

本田 泰

室蘭工業大学 しくみ解明系領域

## 概要

一般的に、運動方程式やフィードバック制御システムなどに時間遅れが含まれると、その挙動は予測困難な場合が多い。時間遅れがないと仮定すれば安定するシステムにおいても、不安定な挙動を示す場合がある。制御理論においては伝達関数のパデ近似などを用いて、それは回避されるが、物理的描像は不明確である。

本研究では、時間遅れを含む2階微分方程式の解が、どのような性質をもつか、遷移行列の固有値を用いて、繰り込みの手法によって安定性解析を行った。時間遅れを考慮した遷移行列の固有値によって、微分方程式の係数を繰り込むことによって系が不安定になる領域の存在を示すことができた。また、シミュレーション結果と比較することでその有効性を検討する。

## Stability analysis of a second order differential equation with time delay by a numerical renormalization

Yasushi Honda

College of Information and System, Muroran Institute of Technology, Japan

### Abstract

Generally speaking, in the case where a time delay is included in an equation of motion or a feedback control system, it is impossible to expect the behavior in a simple manner. There is a possibility that the time delay brings an unstable state of the system that is stable without the time delay. In the control theory, the Padé approximation for the transfer function is used to analyze a system with a time delay. However it does not depict a physical picture.

In this study, we propose a renormalization for coefficients of a second order differential equation. An unstable region in coefficient space is exhibited by this renormalization method. The shape of the stable region is similar to that obtained by simulations for the same differential equation with the time delay.

## 1 はじめに

時間遅れを含まない2階微分方程式は容易に解くことができる。1階微分の係数が負の場合、減衰あるいは減衰振動する。

時間遅れを含む場合、解析的にこれを解くことはできない。現実の系はすべて時間遅れを含んでおり、数理モデルと現実が食い違う現象の根本的な理由の一つがここにある [1, 2, 3, 4]。

本研究では、時間遅れを含む2階微分方程式の解が、どのような安定性をもつか、行列形式と繰り込みの手法を用いて解析する。時間遅れが存在するということは、微分方

程式の係数（ゲイン）が複素数になることと等価であることが明らかになった。

遷移行列の固有値の実部が系の安定性を決める。その固有値は微分方程式の係数によって与えられる。この係数そのものが複素数となるため、固有値の実部も時間遅れの程度に応じて修正が加わる。もとの微分方程式の係数が、時間遅れがない場合に系を安定させると考えられる値であったとしても、時間遅れのくりこまれた係数は複素数であるため、固有値の実部は必ずしも系を安定させる値となるとは限らない。

## 2 時間遅れのない2階微分方程式

時間遅れを含む微分方程式を扱うまえに、比較のために時間遅れを含まないばあいについて遷移行列を用いた形式を示す。

次のような微分方程式があるとする。

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t) \quad (1)$$

$x$  は角度や電流など、どのような物理量でもよい。また、係数  $a, b$  は実数係数 (ゲイン) である。

$$\hat{A} \equiv \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\vec{s} \equiv \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix} \quad (3)$$

と定義すると、(1) 式は

$$\dot{\vec{s}} = \hat{A}\vec{s} \quad (4)$$

と書けるので、 $\vec{s}$  は

$$\vec{s} = e^{\hat{A}t} \vec{s}_0 \quad (5)$$

というかたちをしていることが分かる。つまり  $\hat{A}$  の固有値  $\lambda$  が、振動や減衰・収束などの時間発展の様子を与えることが分かる。

時刻  $t$  が微小時間  $\Delta t$  だけ進むとき、式 (4) から  $\vec{s}$  は

$$\vec{s} + \Delta\vec{s} = \vec{s} + \Delta t \hat{A} \vec{s} \quad (6)$$

と時間発展していくが、これを

$$\vec{s}_{i+1} = \vec{s}_i + \Delta t \hat{A} \vec{s}_i \quad (7)$$

$$= (\hat{I} + \Delta t \hat{A}) \vec{s}_i \quad (8)$$

と漸化式のかたち書き直し、

$$\hat{T} \equiv \hat{I} + \Delta t \hat{A} \quad (9)$$

と定義すると、(6) 式は

$$\vec{s}_{i+1} = \hat{T} \vec{s}_i \quad (10)$$

という漸化式に書き表すことができる。

$\hat{A}$  の固有値を  $\lambda$  また、 $\hat{T}$  の固有値を  $\eta$  とすると、(9) 式から、

$$\lambda = \frac{\eta - 1}{\Delta t} \quad (11)$$

という関係がある。

遷移行列  $\hat{T}$  の特性方程式

$$(\eta - 1)(\eta - 1 + \Delta t a) + \Delta t^2 b = 0 \quad (12)$$

から、具体的にその固有値  $\eta$  をもとめる。もとめた  $\eta$  と (11) 式から、

$$\lambda = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad (13)$$

と求められる。他の方法を用いても同じ解がえられる。とくに新しい方法というわけではないが、後の節で時間遅れが存在する場合と比較するためにここではあえてそれを示した。

$a^2 - 4b < 0$  の場合、角振動数  $\omega$  が

$$\omega \equiv \frac{\sqrt{|a^2 - 4b|}}{2} \quad (14)$$

の減衰振動 ( $a > 0$ ) をすることがわかる。

## 3 時間遅れを含む微分方程式

時間遅れ  $\delta$  が存在する場合の2階微分方程式は

$$\ddot{x}(t) = -a\dot{x}(t - \delta) - bx(t - \delta) \quad (15)$$

である。

$\delta = 0.3$  とした場合のシミュレーション結果を図1に示した。シミュレーション手法として修正オイラー法を用いた。 $a = 0.2$  の場合、時間が経過するに従って振幅が徐々に

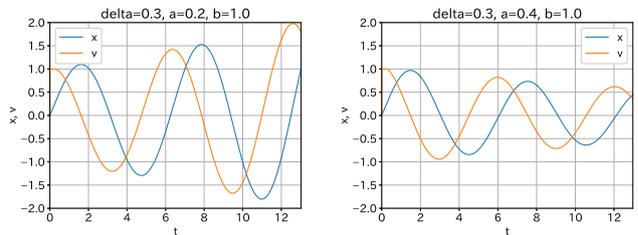


図1: 時間遅れによる発散例 (左図:  $\delta = 0.3, a = 0.2, b = 1$ ) と収束例 (右図:  $\delta = 0.3, a = 0.4, b = 1$ )

に大きくなっている。振動の周期は約  $2\pi$  である。初期速度は  $v(0) = 1$  であるから、時間が2周期ほど進む間に、速度の最大値が約2倍に増幅している。

$a > 0$  であるから、この振る舞いは時間遅れがない場合にはありえない現象である。十分に時間が経つと、この振幅は非常に大きな値となり、フィードバック制御システムなどにおいては致命的な結果をもたらす。

$a$  の大きさが大きければ大きいほど、振動を減衰させる効果がつよい。さらに  $a$  の値を大きくして、 $a = 0.4$  の場合、あきらかに振動は減衰している。つまり  $a = 0.2$  と

$a = 0.4$  の間に、振動の発散と減衰の臨界値が存在することが分かる。

$x$  と  $v = \dot{x}$  の初期値をそれぞれ  $x(0)$  と  $\dot{x}(0)$  とすると、減衰がない単振動の場合、すなわち  $a = 0, \delta = 0$  の場合には

$$\{\omega x(t)\}^2 + \dot{x}^2(t) = \{\omega x(0)\}^2 + \dot{x}^2(0) \quad (16)$$

が成り立つ。  $a \neq 0$  の場合についても、  $r_p(t)$  を

$$r_p(t) \equiv \{\omega x(t)\}^2 + \dot{x}^2(t) \quad (17)$$

と定義すると、これは振幅の増幅もしくは減衰を表す。すなわち、

$$r_p(t) \begin{cases} < r_p(0) & \text{安定} \\ > r_p(0) & \text{不安定} \end{cases} \quad (18)$$

によって系の安定性を判定できる。

いま前のシミュレーションと同様に、初期状態として  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$  と選ぶと、  $r_p(0) = 1$  であるので、  $r_p < 1$  ならば減衰振動、  $r_p > 1$  ならば振幅が増大する不安定な振動を意味する。

図2に  $a$ - $\delta$  空間における、  $r_p$  の値を相図として示した。図2には、  $a < 2$  に対して  $t = 4 \times \frac{2\pi}{\omega}$  の時の値を示した。

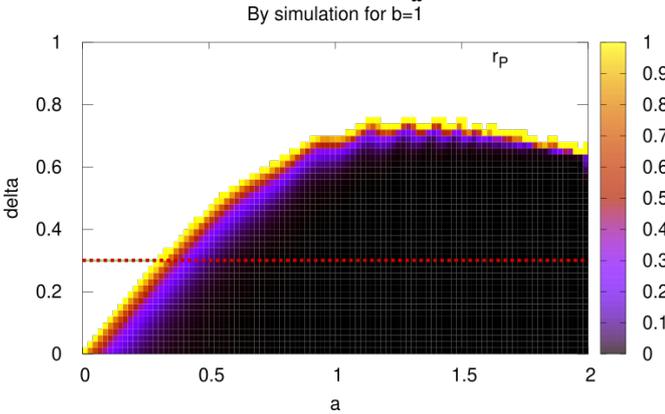


図2: シミュレーションによる、  $a$ - $\delta$  空間における  $r_p(t)$  の相図 ( $b = 1, dt = 10^{-4}$ ).  $a < 2$  に対して (14) 式の  $\omega$  を用いて  $t = 4 \times \frac{2\pi}{\omega}$  に対する  $r_p$ .

白い領域は  $r_p > 1$  すなわち不安定領域である。  $\delta < 0.7$  の領域では、  $\delta$  の値が大きくなるに連れて不安定領域が拡大していることが分かる。 いっぽう、  $\delta > 0.7$  の領域では、  $a$  の値を大きくしても運動は安定しない。この  $\delta$  の臨界値のことを  $\delta_c$  と呼ぶことにする。  $b = 1$  の場合  $\delta_c \simeq 0.7$  である。

#### 4 係数への時間遅れの繰り込み

(15) 式を漸化式の形式で書くと、

$$\vec{s}_{i+1} = (\hat{I} + \Delta t \hat{A}_0) \vec{s}_i + \Delta t \hat{A}_1 \vec{s}_{i-n} \quad (19)$$

である。ただし、2次元行列  $\hat{A}_0, \hat{A}_1$  を

$$\hat{A}_0 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\hat{A}_1 \equiv \begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

と定義する。

また、  $n$  を

$$n \equiv \frac{\delta}{\Delta t} \quad (22)$$

と定義する。  $\delta$  は  $\delta > 0$  の定数であるから、

$$n \rightarrow \infty \quad (\Delta t \rightarrow 0) \quad (23)$$

である。遷移行列の次元数が無限大となり、これが時間遅れがある場合の安定性解析が困難な根本的理由である。

もちろん無限次元の行列はそのままでは取り扱えない。  $n = 0$  は時間遅れなしの場合に相当する。  $n = 1$  の場合の固有値  $\eta$  は  $4 \times 4$  の遷移行列に対する特性方程式を解くことで求めることができる。

$\delta = \Delta t$  の場合、すなわち  $n = 1$  の場合、漸化式は

$$\begin{pmatrix} \vec{s}_{i+1} \\ \vec{s}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{I} + \Delta t \hat{A}_0 & \Delta t \hat{A}_1 \\ \hat{I} & \hat{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{s}_i \\ \vec{s}_{i-1} \end{pmatrix} \quad (24)$$

となる。この遷移行列の特性方程式は、

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \eta & 0 & -\Delta t a & -\Delta t b \\ \Delta t & 1 - \eta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\eta \end{pmatrix} = 0 \quad (25)$$

$$(\eta - 1) \{ \eta(\eta - 1) + \Delta t a \} + \Delta t^2 b = 0 \quad (26)$$

この (26) 式の解を、特に  $\eta_s$  と書くことにする。

$a_r, b_r$  を

$$a_r \equiv \frac{a}{\eta_s}, \quad b_r \equiv \frac{b}{\eta_s} \quad (27)$$

と定義すると、(26) 式は

$$(\eta_s - 1) \{ (\eta_s - 1) + \Delta t a_r \} + \Delta t^2 b_r = 0 \quad (28)$$

となる。このかたちは、時間遅れがない場合の特性方程式 (12) とまったく同じである。つまり、(27) のように係数  $a, b$  を修正 (繰り込み) することによって、時間遅れがない場合と同様の形式で、時間遅れがある場合を定式化できた。

この繰り込まれた係数  $a_r, b_r$  を再び、(26) 式の係数として用いると、それは時間遅れ  $\delta = 2\Delta t$  の系の特性方程式と等価とみなすことができる。

これを繰り返すことで、 $\delta = n\Delta t$  の特性方程式に対応する固有値を得ることができる。

例として  $\delta = 0.3$  の場合を示す。つまり、 $\delta/2\pi \simeq 0.05$  の場合である。また  $\Delta t = 0.003$ ，すなわち  $n = \delta/\Delta t = 100$  である。 $\Re(\lambda)$  の値を、 $a$  の関数として図示した (図 3)。約

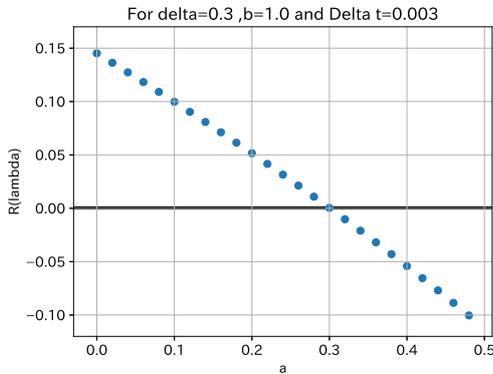


図 3:  $\Re(\lambda)$  ( $\delta = 0.3, b = 1, \Delta t = 0.003, n = 100$ )

$a = 0.3$  で正から負に移り変わっている。この結果はシミュレーションによる結果と一致している。

このように得られた  $\Re(\lambda)$  の値をヒートマップとして、 $a$ - $\delta$  空間に示した (図 4)。白い領域は  $\Re(\lambda) > 0$  の領域である。

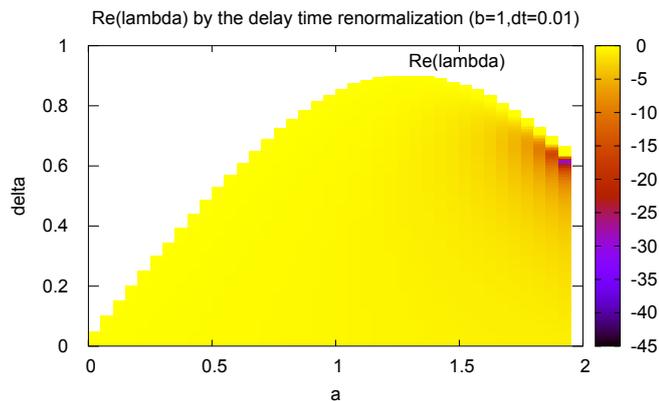


図 4:  $a$ - $\delta$  空間における  $\Re(\lambda)$  を用いた相図。 ( $b = 1, \Delta t = 0.005$ ) 色付けされていない領域では系は不安定。色付けされている領域で、系は安定する

る。すなわち、この領域では系は不安定となり、振動は発散する。

$a < 1$  の範囲では安定-不安定の境界線がシミュレーション結果 (図 2) とほぼ一致している。この境界線は  $a$  の増加とともに非単調に変化しており、 $a \simeq 1.3$  で減少に転じていることも、シミュレーション結果と一致している。これは  $\delta > 0.8$  の場合、時間遅れ系は必ず不安定になることを示している。系の固有振動周期は約  $2\pi$  であるから、時間遅れが系の固有振動周期の約 10% よりも大きくなると、安

定化項のゲインを大きくしても安定化は起こらず、必ず系は不安定となることを示している。

## 5 まとめ

時間遅れのある 2 階微分方程式で表される系の安定性を、遷移行列の固有値で係数を連続的に繰り返すことで解析した。シミュレーション結果の示す結果と定性的にも定量的にもほぼ一致した結果が得られた。 $a > 1$  の領域で若干の両者の不一致がある。本研究ではシミュレーション手法として修正オイラー法を用いたが、十分な計算精度が得られているか、より精度の高い手法と比較する必要がある。また、繰り返し法においても、 $n = 100$  では十分に大きい値とは言えないかもしれない。今後の検討が必要な部分である。

時間遅れが系の固有振動周期の約 10% よりも大きくなると、安定化項のゲインを大きくしても安定化は起こらず、必ず系は不安定となる。同時に、遷移行列の固有値を用いた繰り返しによって実数ゲインが複素数化し、系の不安定性がもたらされるという明快な物理的描像を得ることができた。

物理現象が起こった真の時刻を知ることは不可能であるので、時間遅れの値を推測することも一般的には困難である。逆に本研究の結果によって安定-不安定の境界値が明らかになったので、制御可能な時間遅れ値を変化させることで系に内在する計測不能な固有の時間遅れを推測することが可能になると考えられる。交通流や飛行ロボットなど具体的なシステムにおいてそれらの値を推測することも非常に興味深い課題である。

## 参考文献

- [1] 坂東, 長谷部, 中西, 中山, 交通流のシミュレーションシンポジウム概要集 **3** 38-43 (1996).
- [2] 佐々木, 本田, 交通流のシミュレーションシンポジウム論文集, **19** 49-52 (2013).
- [3] 本田, 交通流のシミュレーションシンポジウム論文集, **19** 53-56 (2013).
- [4] RIMS 共同研究 (2023) 「時間遅れ系と数理学: 理論と応用の新たな展開に向けて」 <https://sites.google.com/view/rims-delay-2023/>