

# 連続空間における集団追跡と逃避 ～粒子更新ルールによる違い～

西江章浩、湯川諭

大阪大学 大学院理学研究科 宇宙地球科学専攻

## 概要

自己駆動粒子系において、複数対複数で行う連続空間上での集団追跡と逃避の問題を考える。本研究では集団追跡と逃避において、粒子が形成するクラスタに着目する。連続空間上で集団追跡と逃避を計算するにあたって、粒子の排除体積に関して様々な粒子の移動のルールを考えることができ、このルールの違いがクラスタの性質に違いをもたらすことを発見した。

## Off-lattice Group Chase and Escape: Difference Depending on Rules of Movement of Particles

Akihiro Nishie and Satoshi Yukawa

Department of Earth and Space Science, Graduate School of Science, Osaka University

## Abstract

We study off-lattice ‘group chase and escape’ problem, in which one group of self-propelled particles chases another one, and focus on a cluster made by the particles. Some rules of movement of particles can be imposed when we deal with an excluded volume of the particles. We found some differences of property of the clusters depending on the rules.

## 1 はじめに

追いかけて、つまり鬼ごっこや野生動物の狩りなどに見られるような自己駆動粒子系を考える。大平・上村によってある集団が別の集団を追いかける「集団追跡と逃避」の問題が提起され研究された [1]。大平らは2次元正方格子上に自己駆動粒子を配置し、それらの追跡と逃避を調べた。このモデルはシンプルなものであり、数多のバリエーションへと拡張することができる [2, 3]。モデルを連続空間に拡張して考えることもできて、ある側面では格子上での計算と違った結果を生み出す [4]。その際、粒子の移動のルールは格子上でのそれとは違うものにするにでき、連続空間においても多様なモデルを考えることができる。同種間または異種間の粒子間相互作用の有無などはその一つであり、相互作用を導入する場合でも様々な形で計算することができる [3]。ど

のような場合でも、集団追跡と逃避において粒子によっていわゆる群のようなものが生成・消滅するが、この群に対する性質はよくわかっていない。そこで我々は粒子の移動ルールを変えて、集団追跡と逃避の結果にどのような違いが生じるかをこの群に着目し調べた。

## 2 モデル

周期境界条件を課したサイズ  $L_x \times L_y$  の2次元の連続空間を考える。その上に追跡する粒子を  $N_C^0$  個、逃避する粒子を  $N_T^0$  個用意する。粒子はそれらの中心から追跡群が半径  $r_C$ 、逃避群が半径  $r_T$  の円形の排除体積を持つことにする。この排除体積とはそれぞれの同種粒子同士が侵してはならない領域とする。

粒子の移動の方法を説明する。追跡する粒子は自

身から最も近い逃避する粒子に対して速度  $\vec{v}_C$  で時間幅  $\Delta t$  の間直進する。つまりある追跡者の座標を  $(x_C, y_C)$ 、それから最も近い逃避者の座標を  $(x_T, y_T)$  とすると、その距離  $d = \sqrt{(x_T - x_C)^2 + (y_T - y_C)^2}$  が最小になるように移動する。ここで、ある追跡者から最も近い逃避者が複数いた場合、追跡者はランダムに1つターゲットにする逃避者を選ぶ。

逆に逃避する粒子は、自身から最も近い追跡する粒子から  $d$  が最大になる方向へ速度  $\vec{v}_T$  で時間幅  $\Delta t$  の間直進する。追跡者と同じく、ある逃避者から最も近い追跡者が複数存在する場合は、逃避者はランダムに1つ追跡者を選び逃避する。

追跡する粒子と逃避する粒子の距離が  $d \leq d_{\text{DEAD}} := r_C + r_T$  となると、つまり追跡者の排除体積が逃避者の排除体積を侵したとき、その逃避者は系から取り除く。こうして全ての逃避者が系から取り除かれた時点で追跡は終了する。

どの粒子も直進するので、ある時刻  $t$  から  $t + \Delta t$  へと移動した先で同種粒子同士が排除体積を侵すことがある。それを回避するために粒子の移動に関して以下の2つのルールを導入する。

## 2.1 ルール 1

大平らによる格子上で集団追跡と逃避では、ある粒子があるサイトに移動する際に、その移動先のサイトが同種粒子によって占有されているときはその粒子は移動できない。これを参考にしたルールを連続空間上で考える。

まず記号について述べる。追跡粒子群からランダムに1つ粒子  $C_i$  ( $1 \leq i \leq N_C^0$ ) を選び、距離  $v_C \Delta t$  だけ移動させる事を考える。この移動先の粒子を  $\tilde{C}_i$  とする。またその位置を  $\vec{P}(\tilde{C}_i)$  とする。排除体積は  $\tilde{C}$  同士でのみ考え、 $C$  と  $\tilde{C}$  との間には考えない。

今、移動していない粒子の中からランダムに選ばれた粒子  $C_b$  を移動させたあとの粒子  $\tilde{C}_b$  が、先に移動していた粒子  $\tilde{C}_a$  の排除体積を侵すことが分かったとき、 $C_b$  は移動させず  $\vec{P}(\tilde{C}_b) := \vec{P}(C_b)$  としてそのまま  $C_b \rightarrow \tilde{C}_b$  とする。こうしたことで、 $\tilde{C}_b$  が他の既に移動を完了している同種粒子  $\tilde{C}_j$  ( $1 \leq j \leq N_C^0, j \neq a, b$ ) の排除体積を侵すことになれば、それらすべての  $\tilde{C}_j$  を元の位置に戻して  $\vec{P}(\tilde{C}_j) := \vec{P}(C_j)$  として移動を完了させる。排除体積を侵す粒子がいなくなるまでこの操作を行う。そしてすべての  $C$  が  $\tilde{C}$  になったところで移動は完了する。次に逃避粒子群にも同じ操作を施す。

## 2.2 ルール 2

ルール 2 では、ルール 1 と異なりすべての粒子が必ず距離  $v \Delta t$  だけ動くようにする。

まず一旦全ての追跡粒子を動かす。粒子  $\tilde{C}_b$  が  $\tilde{C}_a$  の排除体積を侵すとき、 $C_b$  が進んだ方向を  $x$  軸から測った角度  $\theta_{C_b}$  に対してある  $\epsilon \in (0, \pi]$  をとって範囲  $\theta_{C_b} \pm \epsilon$  を作り、新たに  $\theta'_{C_b}$  をこの範囲からランダムに選ぶ。この角度  $\theta'_{C_b}$  を用いて、もう一度  $C_b$  を動かし直す。同時に  $\tilde{C}_a$  も同じように動かし直す。それぞれ  $\vec{P}(\tilde{C}_a)$  と  $\vec{P}(\tilde{C}_b)$  が他の全ての粒子の排除体積領域を侵さなくなるまで動かし直す。そしてすべての  $C_i$  が  $\tilde{C}_i$  になったところで移動は完了する。次に逃避粒子群にも同じ操作を施す。

## 2.3 計算条件

計算領域は周期境界で  $L_x = L_y = 120$ 、粒子数は  $N_C^0 = N_T^0 = 100$ 、排除体積は  $r_C = r_T = 1$ 、粒子の速度は  $v_C = v_T = 1$ 、計算の時間刻みは  $\Delta t = 1$ 、ルール 2 における角度  $\epsilon = \pi$  とする。

各計算においては複数のランダムな初期条件を 10000 サンプル用意し、以下に示すものはそれらのサンプルの平均である。

## 3 全捕獲までの時間

モデルによる違いを調べるために、いくつかの指標について見ることにする。今回のように追跡者と逃避者の速度が同じにすると、一対一の問題の場合は逃避者は永遠に捕まることがない。逃避者を全員捕獲できることは、複数の追跡者を用意することで生まれる性質である。したがって、全ての逃避者を捕獲するまでの時間  $T_{\text{entire}}$  は、複数対複数での追跡と逃避におけるモデルを議論する指標となる。

図 1 に全捕獲までの時間の分布を示す。どちらのルールでも全捕獲までの時間は  $T_{\text{entire}} = 100$  付近でピークを持つが、ルール 2 の方がより長時間まで逃避者が捕まらない可能性が高いことがわかる。これは、逃避者を捕まえるために凝集してきた追跡者が、その排除体積のためにランダムな方向に進まざるを得なくなり、なかなか捕まえるに至らないと考えられる。

## 4 粒子の作るクラスタ

複数対複数の追跡と逃避では、排除体積を除き、各粒子間に相互作用がないのにも関わらず、あたか

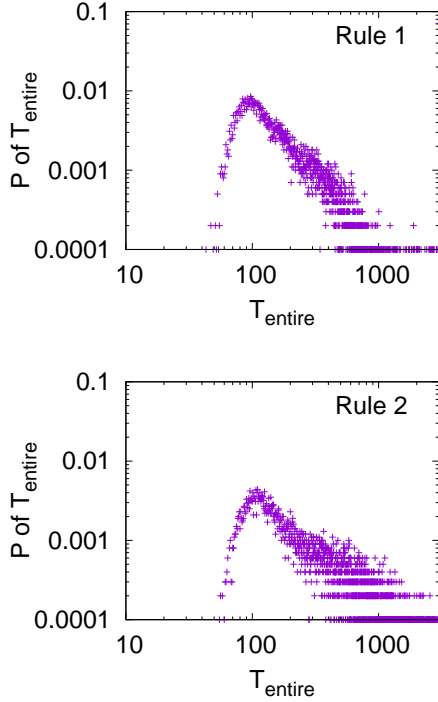


図 1: 全捕獲までの時間  $T_{\text{entire}}$  の分布。

も協力しあい、または相互に通信しているかのように集団運動を行う。その過程で粒子が何かを囲んだり、局所的に凝集してあたかも一つの追跡者であるかのように振る舞うことがある。

そこで粒子の集団としての性質を調べるために、粒子が作るクラスタを定義して、クラスタに関する議論を行う。

クラスタは次のように定義する。クラスタ距離  $r_{\text{cluster}}$  を定義し、ある 2 つの同種粒子間の距離  $d$  が  $d \leq r_{\text{cluster}}$  となるときに、それら 2 つの粒子は同一のクラスタにあるとする。全ての粒子に関して距離  $d$  を測り、あるクラスタに属する粒子から測って  $d \leq r_{\text{cluster}}$  であるものは全て同一のクラスタに属するものとする。また計算時間が進むにつれてクラスタが合流したり分裂したりするが、これはクラスタの消滅及び生成とみなす。今回は追跡する粒子が作るクラスタのみに着目し、また  $r_{\text{cluster}} = 4$  としたときの結果を議論する。

#### 4.1 クラスタの性質

クラスタは上で定義したように、少なくとも 2 つ以上の同種粒子で構成される。あるクラスタに属する粒子の個数をそのクラスタの質量とみなして議論する。クラスタは全逃避者が捕獲されるまで生成し

たり消滅したりするので、あるクラスタに関して、生成してから消滅するまでの時間、すなわちそのクラスタの寿命  $\tau_{\text{cluster}}$  を定義できる。クラスタ  $i$  の時刻  $t$  における質量を  $M^i(t)$  とし、クラスタの発生時刻を  $t'$  とすると、クラスタ寿命を用いて、クラスタ  $i$  の質量の寿命平均

$$\langle M^i \rangle_{\tau_{\text{cluster}}} := \frac{\sum_{t=t'}^{t'+\tau_{\text{cluster}}} M^i(t)}{\tau_{\text{cluster}}} \quad (1)$$

を定義できる。

次にクラスタの形に着目する。あるクラスタ  $i$  の慣性モーメントを

$$I^i = \sum_{\alpha \in i} m_{\alpha} r_{\alpha}^2 \quad (2)$$

とする。ここで  $\alpha$  はクラスタ  $i$  に属する全粒子の添字、 $m_{\alpha}$  は各粒子の質量 (今の場合  $m_{\alpha} = 1$  とする)、 $r_{\alpha}$  はクラスタの重心からの距離である。またクラスタ  $i$  に長さの次元を持つ物理量  $R^i$  があるとする  $I^i = M^i R^i{}^2$  とかけるので、

$$R^i = \sqrt{\frac{\sum_{\alpha \in i} m_{\alpha} r_{\alpha}^2}{M^i}} \quad (3)$$

と表すことができ、 $R^i$  をクラスタ  $i$  の回転半径と呼ぶ。この  $R^i$  についても寿命平均を考えることができ、時刻  $t$  における回転半径を  $R^i(t)$  とすると

$$\langle R^i \rangle_{\tau_{\text{cluster}}} := \frac{\sum_{t=t'}^{t'+\tau_{\text{cluster}}} R^i(t)}{\tau_{\text{cluster}}} \quad (4)$$

となる。以下特に断りのないときはそれぞれ  $\langle M^i \rangle_{\tau_{\text{cluster}}}$ ,  $\langle R^i \rangle_{\tau_{\text{cluster}}}$  を  $M^i, R^i$  とする。

まず、 $M^i$  と  $R^i$  の関係を見る。図 2 に示すようにクラスタの質量と回転半径にはべき乗則がある。もしクラスタに属する粒子が最も長い紐状、つまり粒子間の距離が  $d = r_{\text{cluster}}$  で一直線上に並んでいるとき、回転半径は

$$R = 2\sqrt{\frac{1}{3}(M^2 - 1)} \quad (5)$$

であるので、 $R \sim M^1$  のとき紐状になっていると言える。ルール 1 のクラスタはある粒子が進みたい方向に粒子が存在する場合、自身が止まって道を譲ってしまうのでクラスタが紐状になる傾向にあることよりルール 2 よりもべきが大きい。ルール 2 に関してはクラスタを形成したあと、各粒子は止まることなく開けている場所へ動き続け円形になる傾向にある。

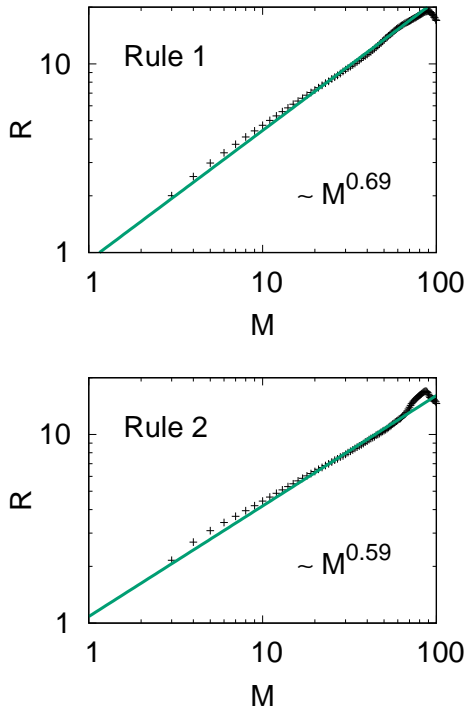


図 2: クラスタの質量  $M$  と回転半径  $R$  の関係。

次にクラスタの寿命について見る。図 3 はクラスタの寿命  $\tau_{\text{cluster}}$  の分布である。クラスタの寿命はルールの違いにより大きく変わることがわかる。ルール 1 では分布が  $\log \tau_{\text{cluster}}$  に従っている。またどの質量  $M$  においても、 $\tau_{\text{cluster}} = 20$  付近を境に傾きを 2 つ持つような分布となる。一方、ルール 2 ではべき乗則に従うような分布が見られる。またどの  $M$  に対しても、べき指数は -0.75 である。更に  $\tau_{\text{cluster}} = 60$  付近でルール 1 では見られなかったようなピークを持つ。

粒子の更新ルールの違いによってこのような差異が表れることは大変示唆的であると考えており、興味のあるところである。またどちらのルールにおいても、質量と寿命の関係が何らかの規則のもとに存在し、普遍的なクラスタの寿命のルールが存在すると考えている。

## 5 まとめ

我々は集団追跡と逃避の問題を連続空間上に拡張し、粒子に排除体積を導入した。その際、粒子の更新に 2 つの異なるルールを与えて違いを調べた。追跡者の粒子からなるクラスタに注目することによって、粒子の更新ルールの違いが差が生ずることを見

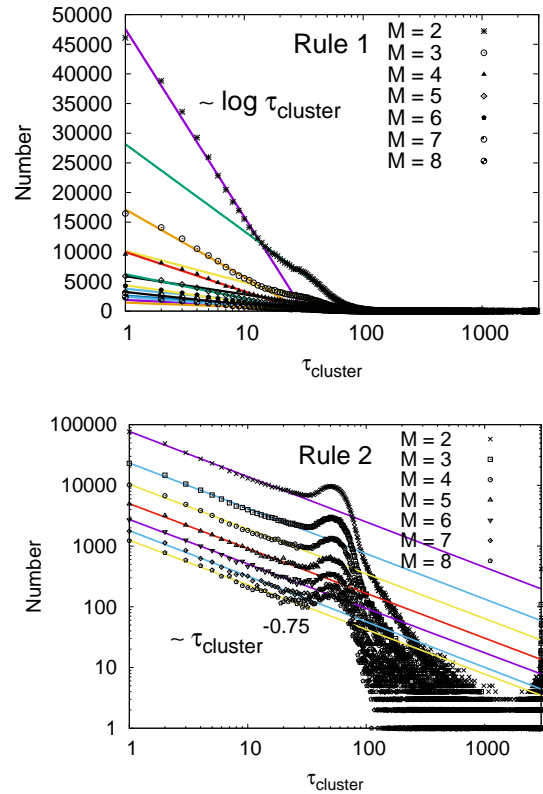


図 3: クラスタの寿命  $\tau_{\text{cluster}}$  の分布。どちらのルールも上の線から順に  $M = 2, 3, \dots, 8$  である。

た。特にクラスタの寿命の詳細な解析は目下の課題である。またクラスタにこのような差を生ずるルールの違いに対する物理的・数理的な理解を深めていくことが必要である。

## 参考文献

- [1] A. Kamimura and T. Ohira, *New J. Phys.* **12** (2010) 053013.
- [2] R. Nishi, A. Kamimura, K. Nishinari, T. Ohira, *Physica A* **391** (2012) 337-342.
- [3] T. Saito, T. Nakamura, T. Ohira, *Physica A* **447** (2016) 172-179.
- [4] L. Angelani, *Phys. Lev. Lett.* **109** (2012) 118104.