

渋滞中の発進確率を含んだモデルと渋滞解消限界密度

竹内友紀乃¹, 大平徹¹

¹ 名古屋大学 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻

概要

CA モデルにおいて、停止した車の前のサイトが空いた時に、確率的に発進して前進するモデル (PrSCA モデル) を提案する。更に、渋滞している初期状態がその渋滞を解消できるかという観点で、理論と実験の両面から、PrSCA モデルの発進確率による限界密度を導いた。

The probabilistic starting model, and its critical density.

Yukino Takeuchi¹, Toru Ohira¹

¹ Graduate School of Mathematics, Nagoya University

Abstract

I propose a new model called “PrSCA model”. In this model, when the space in front of a car in traffic jam becomes unoccupied, the car will proceed with probability p . We derive the critical density for this model, under which a lump of traffic jam is digested.

1 はじめに

セルオートマトン (CA) モデルを用いた交通流の研究のうち、メタ安定分岐 (臨界密度を超える高密度でも流量が密度に比例して大きくなる状態) を示し、ルールを定式化できるものとしてスロースタートモデルがある [1]。スロースタートモデルでは、どの車も「停止後は前が空いたら一度休んで、その次のステップで移動する」というルールに従う。しかし、現実には前が空いたことにすぐ気が付かないドライバーや、常に完全にエンジンを停止しないようにして前とほぼ同時に動くドライバーも存在する。第2章で発進に対するドライバーの差異を表現できるモデルを提案する。また、[2] を参考にこの CA モデルを、Euler-Lagrange 変換を用いて Lagrange 形式で表すことに成功し、これによりドライバーごとに異なる確率を考えることが可能になりモデルを拡張する事ができた。

第3章では各ドライバーが発進するまでの確率と、渋滞する密度との関係を考察する。本論では、すべての車がくっついた渋滞している状態を初期状態と

し、周期境界条件の下、この渋滞が解消されるかどうかを以って、渋滞解消限界密度を考える事とする。

2 確率的に発進するモデル

確率的に発進するモデルは、一回停止した車は前のサイト (セル) が空いた後にすぐに進むこともあれば、空いたことに気が付かず、そのサイトで長い時間停止していることもある事を表現する。そういった停車中の車に対して、次のステップで動くかどうかを決める確率を車の発進確率と呼ぶ。一旦動き始めた車は進めなくなるまで確実に前進する。このモデルを **PrSCA** (Probabilistic Start CA model) と呼ぶ。 U_j^t を時刻 t で第 j サイトに車がいたら 1、いなければ 0 を返す変数として、PrSCA をそれぞれのサイトの状態を表す形式 (Euler 形式) で表したものが

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min [U_{j-1}^t, 1 - U_j^t, \max [U_{j-1}^t - U_{j-1}^{t-1}, M_j^t]] - \min [U_j^t, 1 - U_{j+1}^t, \max [U_j^t - U_j^{t-1}, M_{j+1}^t]]$$

である。ここで、 M_j^t はそれぞれ、 t, j について独立に、確率 p で 1 になり、確率 $1 - p$ で 0 になるよう

なランダム項である。各 min 内第三項により、前時刻に動いていた時と、停まっていた車は $M_j^t = 1$ となった時のみ前進する事を表す。

次に各車単位で位置を表す方法 (Lagrange 形式) での表記は、 x_n^t を時刻 t における n 番目の車の位置 (サイトナンバー) を表すものとし、車の追い越しはないものとする、

$$x_n^{t+1} = x_n^t + \min [x_{n+1}^t - x_n^t - 1, 1, \max [x_n^t - x_{n-1}^t, m_n]]$$

$$m_n = \begin{cases} 1 & (\text{with probability } p_n) \\ 0 & (\text{with probability } 1 - p_n) \end{cases}$$

と書くことができる。ここで、 p_n が n 台目の車の発進確率を表す。Euler 形式では、すべてのサイトに対して共通で p とするしかないが、Lagrange 形式で表すことで p_n を $[0, 1]$ 上で定義される確率分布に従わせることで、車ごとに発進確率を定める事もでき、人によって気が付きやすさが違う事をモデル化できる。

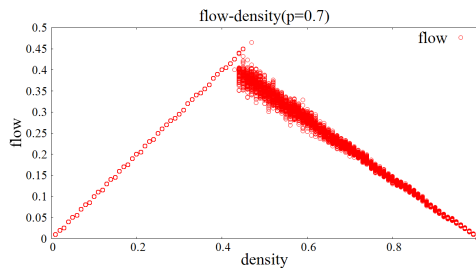


図 1: シミュレーションによる基本図

PrSCA のシミュレーションを行い基本図を書く。シミュレーションは 200 サイトの周期境界の道路で、1000 ステップ行う。また、Lagrange 形式であっても、 x_n^t の値を適宜サイト数で割った余りに置き換えて、車の順番を不変にすることで周期境界のシミュレーションを可能にしている。全ての車の発進確率が共通で 0.7 とする。結果である流量は、最終ステップ分の流量の空間平均である。シミュレーション結果は図 1 のようになる。PrSCA ではメタ安定状態も確認することができる。更に、渋滞領域では確率的に発進するので、流量にばらつきが生まれる。

3 PrSCA の限界密度

3.1 限界密度の導入

次に、渋滞と自由走行の境目の密度について考える。設定は、サイト数が L で、道路には車が N 台あり、この時密度は $\rho = N/L$ の周期境界条件とする。ランダムな初期配置から開始し、長時間後に渋滞が起きている密度としての臨界密度を考えたいが、ランダムな初期配置を理論的に扱うのは困難であるので、一番シンプルな N 台がくっついて渋滞している初期配置 (図 2) を考える事とする。また、ランダムな初期配置と、図 2 のような初期配置では、1000 ステップのシミュレーションをそれぞれ 100 回ずつ行ったとき、流量の平均に差がない事が 95% の確からしさで言えるので、初期配置にはほとんど依存しない事がわかった。

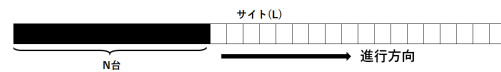


図 2: 渋滞している初期配置

渋滞解消に成功する密度について、1 サイクル渋滞解消限界密度と、 T ステップ渋滞解消限界密度を定義する。そのためにまず、サイクルとは、図 2 の初期条件で、シミュレーションの開始から、初めて最後尾の車が動くまでの過程をいい、1 サイクルにかかるステップ数を 1 サイクル数と呼ぶ。1 サイクル渋滞解消限界密度 (ρ_{s-lim}) とは、1 サイクルで渋滞が解消される密度の最大である。これと対比して、1 回のシミュレーションのステップ数を大きな T で固定して、 T ステップ中に渋滞が解消されるような密度の限界を T ステップ渋滞解消限界密度 (ρ_{m-lim}) と呼ぶことにする。確率的な発進を考えているため、1 サイクルでは解消しない渋滞も、 T ステップでは渋滞解消を試みるチャンスが 1 サイクルよりも多いので、しばらくして解消しうることがある。よって、 $\rho_{m-lim} \geq \rho_{s-lim}$ であることが期待される。また、現実的には、渋滞解消に 1 チャンスしかないというよりは、解消には時間がかかるものなので、 ρ_{m-lim} についても考える必要があると考えている。現在広く用いられている臨界密度としてどちらがふさわしいか現時点では判断しかねるので、臨界密度という名前を用いずに限界密度と呼ぶ。

2つの限界密度について、理論的に近似式を考えて、シミュレーションと比較していくことで、発進確率による限界密度を考えていく。

先に今後用いるシミュレーションにおける限界密度の定め方を説明する。渋滞解消と判定する条件は「シミュレーション停止時に全ての車が動いている」事である。停止時とは、 ρ_{s-lim} を考える時には、初めて最後尾の車が動いたステップであり、 ρ_{m-lim} では T ステップ目である。発進確率は 0.01 刻みとし、各確率に対して、密度を 0.005 刻みで増加させながら、それぞれ渋滞解消できたかを判定する。初めて渋滞解消されなかった(終了時に動いていない車が存在した)密度の一つ前の密度を、シミュレーションにおける限界密度とする。1つの発進確率に対して限界密度を見つける試行を 100 回ずつ行う。

次に理論的に考えるにあたって、最も基礎とする考え方を紹介する。周期境界であるので、渋滞が解消されないのは、図2の渋滞層の最後尾の車が動き始めるまでに、一番先頭の車が最後尾に追いついてしまうときである。つまり、初期配置の渋滞が解消される最低条件は、

$$(1 \text{ サイクル数の平均}) < (\text{先頭と最後尾間の距離})$$

となる事である。この式を限界密度評価式と呼ぶ。

3.2 1 サイクル渋滞解消限界密度

まず前が空いているとき確率 p で発進する、1台の車 (i 台目の車とする) の動き出すまでのステップ数 X_i を考えると、この確率変数はファーストサクセス分布²に従う。この平均を考えると、1台の車が動き始めるまでに平均 $1/p$ ステップかかることがわかる。 N 台の場合を考えると、各車の発進までの回数はそれぞれ独立であることから最後尾の車が動き始めるまでの平均ステップを Y と置くと平均と分散は、

$$E[Y] = NE[X_i] = \frac{N}{p}, \quad V[Y] = \frac{N(1-p)}{p^2} \quad (1)$$

であることがわかる。これにより、(平均1サイクル数) = N/p である。初期状態より明らかに、(先頭と最後尾間の距離) = $L - N$ である。これを限界密度評価式に代入し、 $N = L\rho$ を用いることで、1 サイクル渋滞解消限界密度として

$$\rho_{s-lim} = \frac{p}{p+1} \quad (2)$$

²確率関数は $Prob(X_i = k) = (1-p)^{k-1}p$
平均は $E[X] = 1/p$, 分散は $V[X] = (1-p)/p^2$

といえる。

3.3 T ステップ渋滞解消限界密度

初めに、PrSCA は確率的に推移しているため、 ρ_{m-lim} は、一度のシミュレーションでのステップ数 T に依存してしまう。つまり、「定常状態」を定義することが難しいため、限界密度の近似式は T に依存した限界密度の表現とならざるを得ない。また、シミュレーションを行う際の T の定め方も重要になる。本論でのシミュレーションの仮定 (200 サイト, 1000 ステップ) の妥当性を考えるために、現実に合わせてはめてみる。1サイトの長さを 10m, 最高速度が時速 60km と仮定したとき、このシミュレーションは、2kmの環状道路で 10分以上初期状態の渋滞が解消されなければ、渋滞したとみなしている事に相当するので、不自然ではないと考えられる。よって、以下のシミュレーションでは、 $T = 1000$ ステップとして進める。

では、実際に T ステップ渋滞解消限界密度について考える。定義でも述べたように、渋滞解消を何サイクルも繰り返す事ができる。まず、計算を行うための仮定として、PrSCA のシミュレーションが図3のように毎回解消に失敗し N 台の渋滞状態に再帰するとする。 T ステップのシミュレーションの中で繰り返せるサイクルの回数を M 回とおく。 M は仮定している状況であれば、毎回 N 台のサイクルを繰り返すので、 T を 1 サイクル数の平均である N/p で割って、 $M = \frac{T}{N/p}$ 回行われると考えられる。

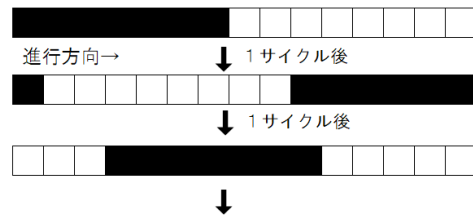


図3: 仮定している状況

この仮定の妥当性を $T = 500 \sim 10000$ において調べてみると、仮定した状況 (N 台の 1 サイクルを M 回行ったうち 1 度でも解消できれば渋滞解消とみなす状況) をそのままシミュレーションして求めた限界密度の平均は、 T ステップの PrSCA のシミュレーションによる限界密度の平均の 2~3 標準偏差内に収まっていた。よって、2つの状況を近いものと考え、

仮定した状況の近似式を導くことで、実際の ρ_{m-lim} の近似式とする方針で進めた。

仮定した状況の限界密度を、チェビシェフの不等式³を使い評価する。サイクルを繰り返す事により1サイクル数が $E[Y]$ より小さいサイクルが起こりうる。その値を $E[Y] - k\sqrt{V[Y]}$ 回と考えると、式 (1) より

$$\frac{N}{p} - k\sqrt{\frac{N(1-p)}{p^2}} < L - N \quad (3)$$

となる。チェビシェフの不等式より、 $E[Y] - k\sqrt{V[Y]}$ よりも更に小さくなる事象は $2k^2$ 回に1度起こる。いま、繰り返しは M 回あるので、 $2k^2 = M$ 程度で近似して、式 (3) に代入すると

$$\rho_{m-lim}(T) = \frac{Lp + \sqrt{\frac{Tp(1-p)}{2}}}{(1+p)L} \quad (4)$$

3.1 節で述べたように、この式は T に依存する。

3.4 シミュレーション結果

実際のシミュレーション結果と比較する。図4は、PrSCAのシミュレーションにより求めた100回分の $T = 1000$ ステップの限界密度 (赤) と1サイクルの限界密度 (緑) と、 $\rho_{m-lim}(T = 1000)$ (実線) と ρ_{s-lim} (破線) を表したものである。シミュレーションでも、3.1 節で述べたように T ステップの方が1サイクルより大きな密度であっても渋滞解消できることが確認できた。また、近似式は $\rho_{m-lim}(T = 1000)$ はシミュレーション結果の平均を通るものを得ることができた。 ρ_{s-lim} に関しては、限界密度評価式は最低条件での評価なので、これ以上の密度では本当に渋滞が解消されない限界密度を上から押さえている式であるように解釈できる。

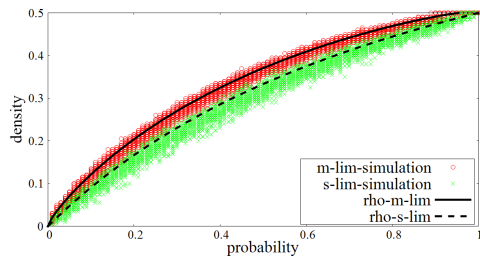


図4: T ステップ渋滞解消限界密度のシミュレーション

³確率変数 Θ が、平均 μ 分散 σ^2 の分布に従うとき、 $Prob(|\Theta - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$ $k > 1$

しかし、この近似式 (4) は T が大きくなるにつれて、 M も大きくなることにより、見積り最小サイクル数 (式 (3) の左辺) がサイクル数の最小値 N よりも小さくなってしまいうので、正しく評価する事が出来ない。その現象が起こるのは計算すると $T > 5000$ 辺りでありこれは実際確認する事も出来たので、大きな T を考える場合には異なる評価が必要である。

4 応用と課題

本論では周期境界条件で考えたが、開放境界にも適応させて、実際の道路上で、信号待ちなどの渋滞が通行再開時に後続車の密度によって、どのように解消されるかを考えたい。開放境界では、図5のように、渋滞層 (図5のA部分) と密度 (ρ) の自由走行層 (図5のB部分) を用意する。自由走行層に対して渋滞解消限界密度を考える。本論での考え方を適用すると、図5の再帰状態になる事が初期状態への再帰であり、再帰が起こるまでに元の渋滞層が解消されるかどうかを以って、開放境界における渋滞解消限界密度を考えたい。

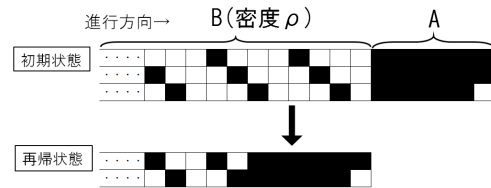


図5: 開放境界における適応

開放境界以外での課題は、(i) 本論中で用いた発進確率 $p = 0.7$ はあくまで予測であるので、実際のデータからパラメータの推定を行いたい事。(ii) 現時点では、式 (4) はサイト数 L にも依存する式となっている上に T が大きいときには使えないため、改良した形を求めたい事である。

参考文献

- [1] 西成活裕, 高橋大輔, “自然渋滞を表すオートマトンモデルの数理構造”, 『第5回交通流のシミュレーションシンポジウムアブストラクト』, pp. 35-38, 1998.
- [2] 友枝明保, “超離散化法, 及びセルオートマトンモデルによる交通流の研究”, 東京大学大学院修士論文, 2006.