

# 振動により駆動される粉体流の輸送則

辻大輔<sup>1</sup>, 大槻道夫<sup>2</sup>, 桂木洋光<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 名古屋大学 環境学研究科

<sup>2</sup> 島根大学 総合理工学研究科

## 概要

砂山のような傾きを持つ粉体層に振動を加えると、粉体が流動化して砂山の形状が徐々に緩和していく。本研究では、この形状緩和の動力学を明らかにするために系統的な実験を行い、砂山表面の傾斜角と粉体の流束の関係を調べた。結果として、両者の関係は先行研究 (*Geology* **29**, 143 (2001)) で提唱されている振動により駆動される粉体定常流の輸送則を改良した関係式により説明できることが分かった。また実験結果より、砂山形状の緩和速度を支配するパラメータは、加える振動の最大速度であることが明らかになった。

## Transport law of granular flows driven by vibration

Daisuke Tsuji<sup>1</sup>, Michio Otsuki<sup>2</sup>, Hiroaki Katsuragi<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Earth and Environmental Sciences, Nagoya University

<sup>2</sup>Department of Materials Science, Shimane University

## Abstract

Sandpile shape is relaxed due to the fluidisation of granular matter when external vibration is given. In this study, to clarify this dynamics, systematic experiments are carried out. Then, the relation between an inclined slope of a sandpile and granular flux is investigated. As a result, the relation can be described by the modified transport law of steady granular flows driven by vibration, which is originally introduced in the previous research (*Geology* **29**, 143 (2001)). We also show that the experimental parameter which determines the relaxation speed is the maximum velocity of vibration.

## 1 はじめに

砂のような多数の固体粒子の集合体である「粉体」は自然界にあまねく存在する物質であり、状況に応じて「固まり」、「流れる」という二面性を持つ。流動状態にある粉体の挙動は複雑であり、通常の連続体力学では説明できないことが多く、その支配法則を解明することは現在も粉体物理の主要な研究課題の一つである。この課題を解決することの意義は大きく、特になだれ・地滑り・地形変化などの自然現象理解への応用が期待される (e.g. [1])。交通流分野においても、群衆の流れを広い意味での多体粒子

集団の動的現象と捉え、その性質を粉体物理の視点から考察する試みが活発に行われている (e.g., [2])。

静止状態にある粉体を流動化させる要因は数多くあるが、本研究では振動による粉体の流動化現象に注目する。静止した砂山全体を振動させると、表面粒子が流れ出して、砂山の形状が緩和することが知られている。これは粉体の基本性質であるものの、この形状緩和を記述するモデルは未だ確立されていない。この問題を解決するためには、砂山の傾きと振動条件に依存した粉体の輸送則を確立する必要がある。

Roering *et al.* (1999, 2001) は、一定の傾き  $\nabla z$  を持つ砂山の斜面上で振動により駆動される粉体定常流の流束  $q$  (単位時間・単位長さあたりに斜面を流れる粉体の量) が次のように記述できることを明らかにした [3]。

$$q = \frac{K_d \nabla z}{1 - (\nabla z / \mu)^2} \quad (1)$$

ここで、フィッティングパラメータ  $\mu$  と  $K_d$  は粉体の有効摩擦係数と輸送係数を意味する。 $\mu$  と  $K_d$  の値は振動強度に依存して変化する [4]。式 (1) において、 $\nabla z \ll \mu$  の時には  $q$  が  $K_d \nabla z$  に漸近する一方で、 $\nabla z \rightarrow \mu$  では  $q$  が発散する。

本研究では、振動により砂山の形状が連続的に緩和する非定常状態においても、流動化した粉体の輸送則に関して式 (1) が同様に成立するかどうかを調べる。さらに、式 (1) における  $\mu$  と  $K_d$  の値の振動条件依存性を調べ、Roering *et al.* (1999, 2001) の理論的予想 [3] との比較を通して議論を行う。

## 2 実験

本研究で使用した実験の模式図を図 1(a) に示す。まず、直径 0.5 mm のアルミナ球 (AS-ONE Corp. AL9-0.5) で構成される粉体を用いて、同一粒子が表面に糊付けされた円盤上に安息角を持つ砂山 (半径 40 mm) を作成する。そして、電磁式加振装置 (EMIC 513-B/A) により円盤を連続的に鉛直振動させる。振動条件に関しては、振幅  $A$  を 0.004 ~ 0.4 mm、周波数  $f$  を 50 ~ 500 Hz の範囲で変化させる。また、加える振動の無次元最大加速度  $\Gamma (= A(2\pi f)^2/g)$  が、2 ~ 10 の値を取るように  $A$  と  $f$  を調整した ( $g$ : 重力加速度)。これは粉体が比較的容易に流動化すると考えられている振動領域 ( $\Gamma \gg 1$ ) に相当する [5]。加振後、流動化した粉体が砂山表面から円盤の外部へ流れ出し、砂山の形状が連続的に緩和するので、ライン型高速レーザー変位計 (KEYENCE LJ-V7080) により、その表面プロファイルの時間発展を記録する。取得データの一例を図 1(b) に示す。 $r$  と  $z$  はそれぞれ砂山の動径座標と高さ座標を表す。レーザー変位計は砂山の山頂 ( $r = 0$  mm) から円盤の端 ( $r = 40$  mm) までの表面プロファイルを、サンプリングレート 50 Hz、計測誤差 50  $\mu$ m 以内に継続的に記録している。本実験では静止状態から 0.5 秒かけて振動振幅を徐々に増幅させ、その後定常振動を実現した。そして、定常振動が始まる時刻を  $t = 0$  s として解析を行った。

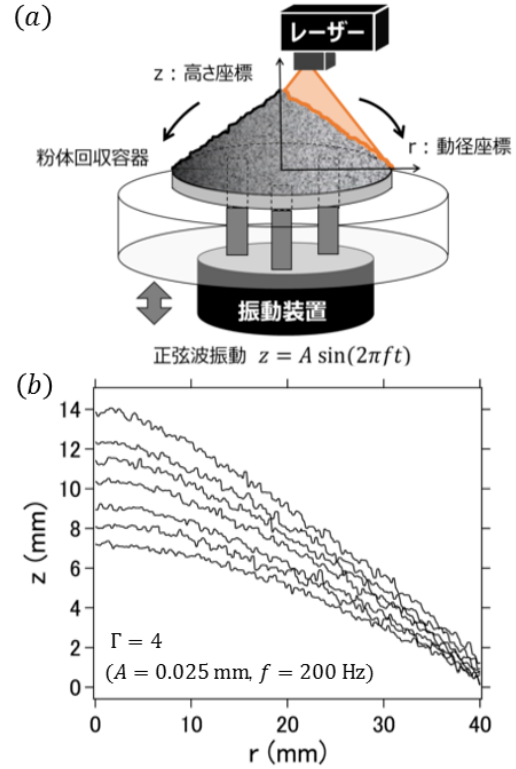


図 1: (a) 実験系の概略図。加える正弦波振動の振幅  $A$  と周波数  $f$  を実験パラメータとして変化させる。振動により流出した粉体は、外部に取り付けた容器で回収する。(b) レーザー変位計による取得データの一例。振動条件は  $\Gamma = 4$  ( $A = 0.025$  mm,  $f = 200$  Hz)。プロファイルの取得時間は上から  $t = 0.0, 0.25, 0.50, 1.0, 2.0, 3.0, 5.0$  秒である。

## 3 結果と議論

### 3.1 流束と傾斜角の関係

式 (1) が本実験系における粉体の輸送に対して至る所で成立するか否かを検証するために、解析対象を  $r = 5 \sim 15, 15 \sim 25, 25 \sim 35$  mm の 3 箇所に分ける。以後、この 3 箇所をそれぞれ領域 1, 2, 3 と呼ぶ。そして、それぞれの領域における局所的な傾きと、その中間地点  $r = 10, 20, 30$  mm における流束の関係調べる。ある測定位置  $r = r_0$ 、時刻  $t = t_0$  における流束  $q(r_0, t_0)$  は、円筒座標系であることを考慮して、砂山の体積変化から次のように算出できる。

$$q(r_0, t_0) = \frac{1}{2\pi r_0 dt} \times \int_0^{r_0} |z(r, t_0 + dt) - z(r, t_0)| 2\pi r dr \quad (2)$$

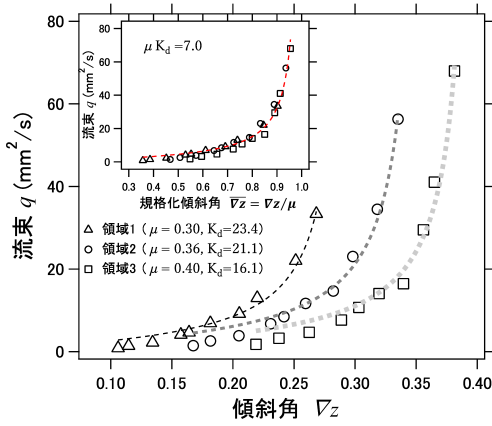


図2: 流束と傾斜角の関係。シンボルの違いは解析領域の違いを意味している。データは領域ごとに式(1)によりフィットした。(インセット) 流束と規格化傾斜角の関係。解析領域に関わらず、全てのデータが式(4)によりフィットできる ( $\mu K_d = 7.0$ )。

これにより得た解析結果の一例を図2に示す。各データ点は  $t = 0$  秒から  $dt = 0.1 \times (\sqrt{2})^n$  秒ごと ( $n : 0$  から1ずつ増える整数) に取得したものである。すべての解析領域において、流束と傾斜角の関係が式(1)によって、フィットできていることが分かる。これより、本研究のような非定常的な粉体の流れに対しても、式(1)が成立することが明らかになった。

しかしながら、Roering *et al.* (1999, 2001) の報告 [3] との相違点として、図2から分かる通り、解析領域に依存して式(1)のフィッティングパラメータである  $\mu$  と  $K_d$  の値が変化することが挙げられる。これは、砂山の各地点において粉体の輸送則が厳密には異なっていることを意味する。この傾向は、1か所の解析領域当たりの長さを変更しても変わらないことを確認している(本研究では10 mmを採用)。我々は次のような考察を行うことにより、これらの違いを統一的に説明できる関係式を実験データより導き出した。

まず、各解析領域で求めた  $\nabla z$  を流束  $q$  の発散点である  $\mu$  により規格化したものを  $\overline{\nabla z}$  と定義する。

$$\overline{\nabla z} = \frac{\nabla z}{\mu} \quad (3)$$

そして、式(3)を式(1)に代入し、 $q$  を  $\overline{\nabla z}$  の変数として書き直すと、

$$q = \frac{(\mu K_d) \overline{\nabla z}}{1 - \overline{\nabla z}^2} \quad (4)$$

となる。実験データも同じく、 $q$  を  $\overline{\nabla z}$  の変数とし

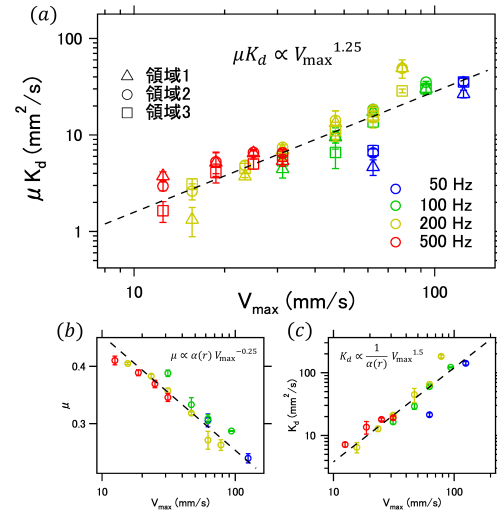


図3: (a)  $\mu K_d$ 、(b)  $\mu$ 、(c)  $K_d$  の振動の最大速度  $V_{\max}$  依存性。 $V_{\max}$  のべき乗により、3つの物理量がスケールされる。(b)と(c)では領域2での結果のみを記載しているが、解析領域に依存して変化するものは  $\alpha(r)$  だけであり、べき指数は変化しないことが確認されている(図には示されていない)。

てプロットし直すと図2(インセット)の通りとなり、すべての実験データが一つの曲線(式(4))上に乗ることがわかる。つまり、粉体の非定常流の流束  $q$  を決めるのは局所的な傾き  $\nabla z$  ではなく、各点における発散点  $\mu$  からの傾きの緩和具合を示す  $\overline{\nabla z}$  によって一意に決まるということが明らかになった。この関係はあくまでも実験データから経験的に得たものであり、必ずしも砂山表面の粉体流一般で成り立つかどうかは自明ではないが、式(4)により本研究の実験結果を統一的に整理することが可能となる。次節では、この式を使用して求めたフィッティングパラメータ  $\mu$  と  $K_d$  の値を用いて、粉体輸送を特徴づける振動パラメータを明らかにする。

### 3.2 振動条件依存性

前節の議論(式(4)、図2(インセット))より、 $\mu K_d$  の値はデータの解析領域に関わらずに一定値を取ることが分かる。そこで、 $\mu K_d$  の振動条件依存性を調べたところ、図3(a)に示した通り、 $V_{\max}^{1.25}$  でスケールされることが明らかになった ( $V_{\max} = A(2\pi f)$ : 加える振動の最大速度)。ここで、シンボルの違いは解析領域の違いを意味しているが、 $\mu K_d$  の値は解析領域に依存せずにおおよそ一定値を取るため、全てのデータが一つの直線上に乗る。

次に、さらなる解析・議論を進めるため、 $\mu$  と  $K_d$  のそれぞれの値の振動条件依存性を調べた (図 3(b),(c))。その結果、 $\mu$  と  $K_d$  の両方の値は、 $\alpha(r)V_{\max}^{-0.25}$  と  $\alpha(r)^{-1}V_{\max}^{1.5}$  でスケールされることが分かった。ここで、 $\alpha(r)$  は次元が不明な解析領域のみに依存した係数である。図 3(b),(c) では解析領域の中間である領域 2 におけるデータのみを使用しているが、領域 1 と 3 においても  $V_{\max}$  依存性のべき指数には変化がなく、 $\alpha(r)$  が解析領域に依存して変化する。この係数に関しては、 $\mu K_d$  の値が解析領域に依存せず一定値を取ることから、 $\mu$  と  $K_d$  の解析領域依存性は打消し合う ( $\alpha(r) \times 1/\alpha(r) = 1$ )。これらを踏まえて、振動条件依存性を整理すると次の通り。

$$\mu K_d \propto \alpha(r)V_{\max}^{-0.25} \times \frac{1}{\alpha(r)}V_{\max}^{1.5} \propto V_{\max}^{1.25} \quad (5)$$

粉体の有効摩擦係数  $\mu$  が  $V_{\max}$  が増すにつれて減少していく傾向 (図 3(b)) は、近年の先行研究 [6] の報告とも整合的である。また、 $V_{\max}$  を大きくすると、粉体の流れやすさを特徴づける輸送係数  $K_d$  が大きくなる傾向 (図 3(c)) も直観に反せず自然である。

### 3.3 表面流速と振動条件の関係

砂山表面で振動により流動化して流れている粉体の速さ (流速) を  $V_{\text{flow}}$  とする。Roering *et al.* (1999, 2001) は、この  $V_{\text{flow}}$  と  $\mu$  と  $K_d$  の間に次のような関係があることを理論的に導いた [3]。

$$K_d \propto \frac{V_{\text{flow}}}{\mu^2} \quad (6)$$

これより、式 (5) と (6) を組み合わせることにより

$$\frac{V_{\text{flow}}}{\mu} \propto \mu K_d \propto V_{\max}^{1.25} \quad (7)$$

が導出できる。ここで、実験データ (図 3(b)) より  $\mu \propto \alpha(r)V_{\max}^{-0.25}$  であるので、これを式 (7) に代入すると、

$$V_{\text{flow}} \propto \alpha(r)V_{\max} \quad (8)$$

となり、解析領域 ( $\alpha(r)$ ) を固定して考えれば、砂山の表面流速  $V_{\text{flow}}$  が同じ次元を持つ振動の最大速度  $V_{\max}$  に比例することが予想できる。

## 4 まとめと今後の課題

本研究では、実験により砂山の傾斜角と振動により流れる粉体の流速の関係が式 (4) により記述でき

ることが分かった。そして、振動状態における粉体の流れを特徴づける物理量である  $\mu$  と  $K_d$  を決める振動条件は、加える振動の最大速度  $V_{\max}$  であることを明らかにした。

しかし、式 (4) のような解析領域依存性を補正する関係式が経験的に実験データより見つかったものの、そもそも輸送則が解析領域に依存して変化する根本的な原因は分かっていない。これらの理論的背景の考察を進めていくことが今後の課題となる。現在は、輸送則の解析領域依存性の普遍性を確認するために、砂山の初期形状、および境界条件を変更することを検討している。具体的には、十分広い平面上に砂山を作成し、本実験とは異なる粉体が外部に流出しない系で同様の実験を行う予定である。

また、本研究で得た振動条件依存性 (式 (5)) と Roering *et al.* (1999, 2001) の理論的予想 [3] (式 (6)) から、 $V_{\text{flow}}$  と  $V_{\max}$  が比例するという関係 (式 (8)) を導いた。今後の展望として、粒子イメージ計測法 (PIV) などを用いて実験データより  $V_{\text{flow}}$  を直接測定し、 $V_{\max}$  との関係性を調べることにより、本研究で導き出した式 (8) の妥当性を証明することを目指す。これらの将来的な解析が、式 (4) の理論的背景を考察するための足掛かりとなることが期待される。

## 謝辞

本研究は JSPS 科研費基盤 (B) No.15H03707 の支援を受けた。

## 参考文献

- [1] J. E. Richardson *et al.*, *Science*, **306**, 1526 (2004)
- [2] 遠藤圭太, 桂木洋光, 第 21 回交通流と自己駆動粒子系シンポジウム論文集, 95 (2015)
- [3] J. J. Roering *et al.*, *Water Resources Research* **35**, 853 (1999); J. J. Roering *et al.*, *Geology* **29**, 143 (2001)
- [4] J. J. Roering *et al.*, *Earth Surf. Process. Landforms* **29**, 1597 (2004)
- [5] T. M. Yamada & H. Katsuragi, *Planet. Space Sci.* **100**, 79 (2014)
- [6] H. Lastakowski *et al.*, *Sci. Rep.* **5**, 13455 (2015)