

# 都市交通の単純化したモデルにおける安定性と巨視的基本図

吉岡直樹<sup>1,2</sup>, 島田尚<sup>2</sup>, 伊藤伸泰<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> 理化学研究所 計算科学研究機構

<sup>2</sup> 東京大学大学院 工学系研究科 物理工学専攻

## 概要

都市交通の巨視的なふるまいを統計力学的に議論するために、単純化したグラフモデルを提案し、その安定性と巨視的基本図を解析的手法とシミュレーションにより調べた。線形安定性解析の結果、すべての道路の流量が等しくなる解は、各道路の基本図の非対称性を非常に強くしない限り、渋滞相にある道路が1本でもあると不安定になることが分かった。また、我々のモデルにおける巨視的基本図を、簡単なネットワークについては解析的に、格子状のネットワークについてはシミュレーションによりそれぞれ調べた。その結果、我々のモデルでは巨視的基本図は容易に不連続になることを見出した。この転移点について、平均場解析により初期条件依存性を議論した。

## Stability and macroscopic fundamental diagram in simple model of urban traffic

Naoki Yoshioka<sup>1,2</sup>, Takashi Shimada<sup>2</sup> and Nobuyasu Ito<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> RIKEN Advanced Institute for Computational Science

<sup>2</sup> Department of Applied Physics, Graduate School of Engineering, the University of Tokyo

## Abstract

A simple graph-based model of urban traffic is proposed to discuss macroscopic behavior, and its stability and macroscopic fundamental diagram (MFD) are studied analytically and numerically. Using linear stability analysis, it is shown that only one jammed street makes our system unstable unless fundamental diagram of each street is strongly asymmetric. Moreover, MFDs in our model system are investigated analytically for simple networks and numerically for grid networks. It is found that MFDs in our system are discontinuous. Transition point of MFD is also discussed in terms of mean-field analysis.

## 1 はじめに

近年、都市交通研究のトピックの一つとして巨視的基本図というアイデアが注目を受けている [1]. これは、都市全体の平均車両密度と流量に注目すると、高速道路の基本図と同様に、その都市交通を特徴づけられる密度流量特性が得られるというものである。実験 [1] やシミュレーション [1, 2] により、少なくとも一部の系ではこの巨視的基本図が存在することが確かめられている。しかしながら、そのメカニズムに

ついてはまだ十分には理解されていない。

我々は、このような都市交通における巨視的基本図を理解するために、簡単なグラフ上のモデルを考えたい。同様のモデルを用いた先行研究はいくつか存在するが [3, 4, 5], これらはいずれも巨視的基本図を考える上で問題を抱えている。2章では我々のモデルと先行研究の問題点について説明する。その上で、我々のモデルに対する解析計算およびシミュレーションの結果を3章で述べる。最後に4章で本論文のまと

めと展望を示す。

## 2 研究手法

### 2.1 モデル

都市交通のモデルとして、 $N$  個の頂点と  $N_{\text{street}}$  本の辺を持つ強連結有向グラフを考える。ここで、頂点  $i = 1, \dots, N$  を交差点、辺  $i \rightarrow j, \dots$  を交差点を結ぶ長さ  $L$  の道路と解釈する。各道路では車両集団の空間構造を無視し、それぞれ道路  $i \rightarrow j$  にのみ依存する車両密度  $\rho_{i \rightarrow j}$  と流量  $q_{i \rightarrow j} \equiv q(\rho_{i \rightarrow j})$  ( $0 \leq \rho_{i \rightarrow j}, q_{i \rightarrow j} \leq 1$ ) で交通を特徴づけられるとする。さらに、本論文においては基本図  $q(\rho)$  は道路  $i \rightarrow j$  によらず同一であり、

$$q(\rho) = \begin{cases} v\rho & \text{if } \rho < \rho_p \equiv 1/v, \\ w(1 - \rho) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

で与えられると仮定する。ここで、 $w = (1 - \rho_p)^{-1} = (1 - 1/v)^{-1}$  である。

各交差点に入ってきた車両は外向きの道路に均等に分配されると仮定すると、各々の道路における車両密度の時間発展は、自然な形として次の様に見えるのが妥当である；

$$\frac{d\rho_{i \rightarrow j}}{dt} = \frac{1}{n_i^{\text{out}} - n_i^{\text{full}}} \sum_k \frac{q(\rho_{k \rightarrow i})}{L} - \frac{q(\rho_{i \rightarrow j})}{L}. \quad (2)$$

ここで、式 (2) の第一項は交差点  $i$  から道路  $i \rightarrow j$  に単位時間あたりに流入する車両密度、第二項は道路  $i \rightarrow j$  の交差点  $j$  から単位時間あたりに流出する車両密度、 $n_i^{\text{out}}$  は交差点  $i$  における外向きの道路の数である。また、 $n_i^{\text{full}}$  は交差点  $i$  から外向きにている道路のうち密度が 1 であるもの数である。

### 2.2 本モデルの先行研究

このようなモデルの先行研究としては、Daganzo らによる交差点の数が 1、道路の数が 2 であるような場合 (two-bin model, 図 2 の差込図を参照) の研究がある [3]。ただし、彼らは式 (2) の代わりに

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \frac{q(\rho_j)}{L} - \frac{q(\rho_i)}{L} & \text{if } \rho_1, \rho_2 < 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

を採用している。流量が同一になるような解の線形安定性を議論し、平均密度  $\rho_{\text{av}}$  に対し、 $\rho_{\text{av}} < \rho_p$  では安定、 $\rho_{\text{av}} > 1/2$  では不安定であることを見出した。

さらに、 $\rho_p < \rho_{\text{av}} < 1/2$  では片方の道路が  $\rho > \rho_p$ 、もう片方が  $\rho < \rho_p$  となる状態が安定であり、巨視的基本図は連続に変化することを主張した。

一方、Ezaki らは、各道路における基本図が対称 ( $\rho_p = 1/2$  に対応) である条件のもとで、ランダムグラフと実際の航空ネットワークを用いた系の安定性を議論した [4, 5]。全ての道の車両密度が同一である条件のもとで線形安定性解析を行い、 $\rho_{\text{av}} > \rho_p$  で不安定になることを見出した。さらに、巨視的基本図は  $\rho_{\text{av}} = \rho_p$  で不連続になることを示した [4]。

これら二つのグループの主張は一見すると矛盾しているように思える。しかしながら、この二つの主張の前提にはそれぞれ問題がある。まず、Daganzo らは two-bin model という非常に小規模な系の解析しかしていないことが問題である。一方、Ezaki らの研究では対称な基本図のみを考えているということが実は重要な点である。実際、Daganzo らの用いた two-bin model に対して対称な基本図の場合を考察すると、中間の安定な状態は消失し、巨視的基本図は  $\rho_p = 1/2$  で不連続になる。また、Ezaki らはすべての道の車両密度が同一であるという場合のみを考えていたが、これもかなり特殊な条件と言えよう。

以上から、各道路における基本図が非対称な時に大きな道路ネットワークの安定性や巨視的基本図がどうなるかを調べるが本研究の主題となる。

## 3 結果

### 3.1 線形安定性解析

#### 3.1.1 簡単なネットワークにおける厳密解

我々は、まず、簡単なネットワーク構造の場合について式 (2) の線形安定性解析を行った [6]。その詳細はここでは省略するが、次のような厳密解を得ている：すべての道路について  $q(\rho_i)$  が等しい解の安定性を考える。すべての道路が自由走行相 ( $\rho_i < \rho_p$ ) にある時は系は線形安定である。一方、渋滞相 ( $\rho_i > \rho_p$ ) にある道路  $N_C$  が 2 本以上あると系は必ず不安定となる。さらに、 $N_C = 1$  の場合、系が線形安定となる条件は  $0 < \omega = w/v = (v - 1)^{-1} < \alpha(N_{\text{street}})$  であり、 $\lim_{N \rightarrow \infty} \alpha(N) = 0$  となる。

#### 3.1.2 正方形格子ネットワークの数値解

次に、 $N_x \times N_y$  正方形格子ネットワークの場合を議論する。ここで、図 1 の差込図にあるように、道路は

北向きもしくは東向きにのみ通っていると仮定する。式 (2) を線形化すると右辺のヤコビ行列が出てくるが、その最大固有値  $\lambda_{\max}$  の符号により系の線形安定性を議論できる。

図 1 に、 $2 \times 2$  格子ネットワークにおける  $\lambda_{\max}$  の  $\omega = (v-1)^{-1}$  依存性を示す。格子ネットワークの場合でも前述と同様の結果、すなわち安定条件が  $N_C = 0$ 、もしくは  $N_C = 1$  でかつ  $0 < \omega < 1/(N_{\text{street}} - 1)$ 、 $v > N_{\text{street}} = 2N_x N_y$  となることが分かった。

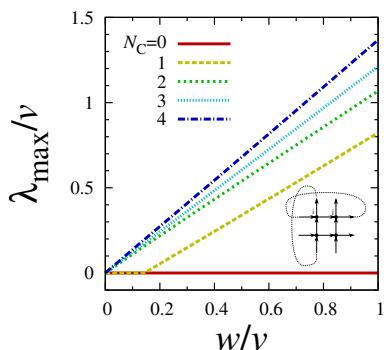


図 1:  $2 \times 2$  格子ネットワークでの最大固有値  $\lambda_{\max}$  の  $\omega = w/v = (v-1)^{-1}$  依存性。  $N_C$  は渋滞相にある道路の数である。ここで、 $1/(N_{\text{street}} - 1) = 1/7$  であることに注意せよ。(差込図)  $N_x \times N_y$  格子ネットワークの模式図。

以上の議論から、十分大きな都市の交通を考える場合、このモデルだと  $N_C \geq 1$  では不安定になるということが結論づけられた。

## 3.2 巨視的基本図

### 3.2.1 $N$ -bin model の場合

本モデルでどのような巨視的基本図が得られるのか、まず、two-bin model を道路の本数が  $N$  の場合に拡張した  $N$ -bin model について解析的に調べた。結果を図 2 に示す。ここで、 $\rho_p = 0.3$ 、すなわち  $\omega = 3/7 < 1/2$ 、 $v = 10/3 < 4$  に注意せよ。

我々の設定では巨視的基本図は  $N$  個の山を持つという点特徴的である。ここで、 $\rho$  の小さい方から順に山に  $n = 1, 2, \dots, N$  と番号付けることにすると、山  $n$  は  $n-1$  本の道路が完全渋滞にある時の、残り  $N-n+1$  本の道路に関する巨視的基本図に対応している。すなわち、一般性を失わず  $\rho_1 \leq \dots \leq \rho_N$  としたとき、山  $n$  で傾きが  $v > 0$  の箇所では  $\rho_1 = \dots = \rho_{N-n+1} < \rho_p$ 、 $\rho_{N-n+2} = \dots = \rho_N = 1$  が成り立つ。一方、傾きが負の箇所では  $\rho_1 = \dots = \rho_{N-n} <$

$\rho_p < \rho_{N-n+1} < 1$ 、 $q_1 = \dots = q_{N-n} = q_{N-n+1}$ 、 $\rho_{N-n+2} = \dots = \rho_N = 1$  となっている。

また、 $\omega > 1/(N-1)$ 、 $v < N$  のとき、3.1 節の結果を反映して  $n < N-v+1$  ならば山  $n$  と  $n+1$  とは不連続となる。

なお、 $N$ -bin model の巨視的基本図を  $q_N(\rho)$  とすると  $\sup_{0 \leq \rho \leq 1} |q(\rho) - q_N(\rho)| = vw/N$  となり、 $N \rightarrow \infty$  で道路 1 本についての基本図  $q(\rho)$  に一様収束することが示せる [7]。

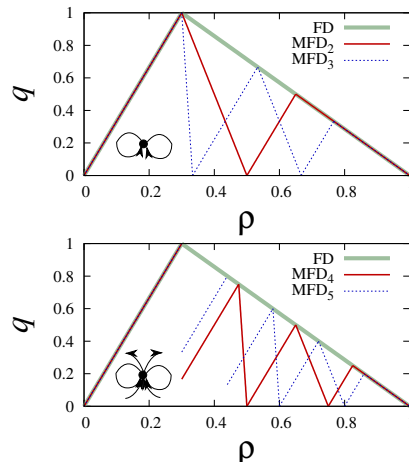


図 2:  $N$ -bin model における巨視的基本図 [ $\rho_p = 1/v = 0.3$ , (上)  $N = 2, 3$ , (下)  $N = 4, 5$ ]. ここで、 $\text{MFD}_k$  は  $k$ -bin model における巨視的基本図であることを示す。また、太い実線は道路 1 本についての基本図である。(差込図) 2-bin model (上) および 4-bin model (下) の模式図。

### 3.2.2 格子ネットワークのシミュレーション結果

さらに、格子ネットワークで巨視的基本図がどうなるかシミュレーションを行った。初期密度を  $[\rho_0 - \Delta\rho_0, \rho_0 + \Delta\rho_0]$  の一様分布にしたがう乱数で各道路に与えたときの結果を図 3 に示す。

まず、平均定常密度  $\langle \rho_{\text{st}} \rangle$  に対し、 $\langle \rho_{\text{st}} \rangle > \rho_c(\Delta\rho_0)$  において、 $N$ -bin model にあった山は存在しないということが特徴として挙げられる。ここで、必ずしもすべての道路について  $\rho_{i \rightarrow j} = 0$  もしくは  $1$  となっている訳ではないことに注意が必要である。図 3 の破線は交通状況を考えずに  $q(\rho_{i \rightarrow j})$  について平均をとったものを示しているが、0 にはなっていない。これは、ある交差点  $i$  から外に出て行く道路がすべて  $\rho_{i \rightarrow j} = 1$  となっているために、その交差点に向かう道路には  $0 < \rho_{k \rightarrow i} < 1$ 、 $q_{k \rightarrow i} = 0$  であるものが存在していることを意味する。

また、より重要な点として、巨視的基本図が不連続となるのが  $\langle \rho_{st} \rangle = \rho_c(\Delta\rho_0) < \rho_p$  であることが挙げられる。ここで、転移点  $\rho_c(\Delta\rho_0)$  は  $\Delta\rho_0 \rightarrow 0$  で  $\rho_c(\Delta\rho_0) \rightarrow \rho_p$  となる。さらに、 $\rho_c = \rho_p - \beta\Delta\rho_0$  と表せて、 $\beta \simeq 0.5$  であることが分かった。

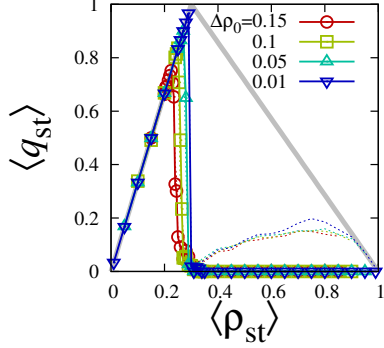


図 3:  $10 \times 10$  格子ネットワークの巨視的基本図。太い実線は道路 1 本についての基本図、各破線は  $\langle \sum_{i \rightarrow j} q(\rho_{i \rightarrow j}) / N_{\text{street}} \rangle$  を表す。また、 $\langle \rho_{st} \rangle$  と  $\langle q_{st} \rangle$  はそれぞれ定常状態における道路 1 本あたりの車両密度と流量のアンサンブル平均であるが、この場合  $\langle \rho_{st} \rangle = \rho_0$  となることに注意せよ。

### 3.2.3 転移点の平均場解析

仮定として、 $\rho_0 > \rho_c$  の場合、初期に渋滞相 ( $\rho > \rho_p$ ) にあった道路はすべて定常状態で  $\rho_{st} = 1$  になるとする。すると、 $\rho_0 > \rho_c$  では、初期に自由走行相 ( $\rho < \rho_p$ ) にあった道路の一部も定常状態では渋滞相になり、また、 $\rho_0 = \rho_c$  での転移は高密度側からすればこのような道路が消失する転移と見なすことができる。

初期に渋滞相にある道路の割合  $\phi_J$  は

$$\phi_J(\rho_0) = \frac{\rho_0 + \Delta\rho_0 - \rho_p}{2\Delta\rho_0} \quad (4)$$

であるので、定常状態でこれらの道路が受け持つ、系全体の車両密度への寄与は  $N_{\text{street}}\phi_J(\rho_0) \times 1 = N_{\text{street}}\phi_J(\rho_0)$  となる。一方、車両密度の系全体での合計は  $N_{\text{street}}\rho_0$  であるのだから、 $\rho_0 = \rho_c$  では  $N_{\text{street}}\rho_c = N_{\text{street}}\phi_J(\rho_c)$ 、すなわち

$$\rho_c = \frac{\rho_p - \Delta\rho_0}{1 - 2\Delta\rho_0} \simeq \rho_p - \beta_{\text{MF}}\Delta\rho_0, \quad (5)$$

を満たす。ここで、 $\beta_{\text{MF}} = 1 - 2\rho_p$  である。

3.2.2 節の結果は  $\rho_p = 0.3$  の場合のもので、このとき  $\beta_{\text{MF}} = 0.4$  となる。これはシミュレーション結果  $\beta \simeq 0.5$  に近い値ではあるが、まだ多少のずれが存在する。このずれを解決するのは今後の課題である。

## 4 まとめと展望

本研究では都市交通を単純化したグラフモデルを用い、都市交通のマクロなふるまいについて議論した。線形安定性解析の結果、道路が 1 本でも渋滞相にあるような定常状態はマクロの極限では必ず不安定になることが分かった。また、一般に、巨視的基本図がある密度で不連続になることを見出した。このような不連続性は実際の都市交通の観測などでは見られず、我々のモデルには欠陥があるといえる。

では何が連続な巨視的基本図をもたらしているのだろうか。例えば、現実の都市交通では各車両は OD を持っており、我々のモデルのように保存系にはなっていない。そこで、我々の系を開放系にするというのは興味深い。また、Daganzo らは“賢い”車両を考慮することで [3]、Ezaki らは航空ネットワーク上の流量の制御を行うことで [5]  $\rho_0 > \rho_p$  においても安定な車両密度領域を作ることに成功している。これを考慮すると、例えば我々のモデルの交差点に信号を導入して交通を制御するというのはいい手段であろう。他に、Mazloumin らは安定な巨視的基本図を得るためには流れの“量子化”が必要であると主張している [2]。このアイデアも一つの可能性であろう。

## 謝辞

本研究は、JST、CREST の支援を受けたものである。

## 参考文献

- [1] N. Geroliminis and C. F. Daganzo, *Transp. Res. B* **42**, 759 (2008).
- [2] A. Mazloumian, N. Geroliminis, and D. Helbing, *Phil. Trans. R. Soc. A* **368**, 4627 (2010).
- [3] C. F. Daganzo, V. V. Gayah, and E. J. Gonzales, *Transp. Res. B* **45**, 278 (2011).
- [4] T. Ezaki and K. Nishinari, *Phys. Rev. E* **90**, 022807 (2014).
- [5] T. Ezaki, R. Nishi, and K. Nishinari, *J. Stat. Mech.: Theor. Exp.*, P06013 (2015).
- [6] T. Shimada, N. Yoshioka, and N. Ito, in preparation.
- [7] N. Yoshioka, T. Shimada, and N. Ito, in preparation.