

結合断面モデルによる3次元砂丘の形状とダイナミクス

新屋 啓文, 西森 拓, 粟津 暁紀

広島大学大学院 理学研究科 数理分子生命理学専攻

概要

バルハン砂丘や横列砂丘の形状の安定性や移動の本質を解析的に捉えるため、西森、勝木らの2次元バルハン衝突方程式を拡張し、風向きとの2次元断面を複数抜き出し、隣り合う断面との相互の砂のやり取り(相互作用)を取り入れた2次元断面結合モデルを提案した。このモデルは、3次元バルハン砂丘のダイナミクスを低次元力学系として表現しており、初期屈曲度、相互作用の強さ、風の強さに依存した、形状の安定性について解析的に議論できる。その結果、i) 初期屈曲度に対し、相互作用を強くすることで安定な形状を維持できる領域が増加する。ii) 風を強くすることで屈曲度が鋭くなることが分かった。

3D Dune Dynamics as the Coupled Model of 2D Cross-Sections

Hirofumi Niiya, Hiraku Nishimori, Akinori Awazu

Department of Mathematical and Life Sciences, Hiroshima University.

Abstract

To analyze the stability of the shape and the migration process of Barchan and Transverse dunes, we propose an extended model for the collision dynamics of 2D barchans[H. Nishimori et al, (2009), *Theoretical and Applied Mechanics Japan* **57** 174]. First, cross-sections of a 3D dune parallel to the wind direction are extracted as the individual elements of the skeleton of 3D dune, hence, the dynamics of each and interaction between them is considered. This model consists of coupled ordinary differential equations and simply describes the essential dynamics of 3D dune. Here we study the stability of the shape of 3D barchan depending on its initial shape and the wind strength. The numerical results indicate that i) The stability for the steady shape of barchan increases as the interaction between cross-sections becomes stronger. ii) Degree of deflexion of 3D barchan shape gets greater by increasing the wind force.

1 はじめに

粉や砂等の固体粒子の集合体である粉流体は、固体一流体的な振る舞いを示すことから複雑な挙動を示す。例えば、地上で最も大きい粉流体の構造物である砂丘は、周りから吹く風によって移動し、風向きの変化によって、線状、三日月型、星形と多様な形状をとる。砂丘の形状を決定する要素として、「風向の自由度」と「砂の量」の2つが重要であり、特に、三日月型のバルハン砂丘は地面を覆う砂の量が少なく、風向きが一定の場合に形成される。ま

た、単体のバルハンは、高さが低いほど移動速度が速く、形状を保ちつつ風下へと移動することが知られている。近年では、バルハン砂丘は砂漠上以外にも雪で形成されたものや、火星等の他の惑星でも確認されている [1]。バルハン砂丘に関するこれまでの研究として、水槽実験、大自由度セルモデルのシミュレーション [2][3][4] などがあり、いずれもバルハンの形成・移動を再現することができるが、バルハン砂丘や横列型砂丘の形状の安定性について解析的に捉えることが困難であった。そこで、本研究では、砂丘同士の衝突過程を記述する為に提案され

たバルハン衝突方程式 (ABCDE)[5][6] と同様にバルハン砂丘の移動の本質を取り入れた連立常微分方程式であるバルハン移動方程式の導出を行うことで、バルハン砂丘の移動と形状保存のメカニズムを解析した。

2 バルハン移動方程式

西森・勝木らが提案したバルハン衝突方程式は、砂丘の進行方向にそって平行となる2次元断面を用いて、2次元での砂丘衝突を記述した方程式である。そのため、3次元の砂丘の形状や移動を直接取り扱うことはできない。そこで、3次元のバルハン砂丘の移動を記述するために、2次元断面を複数抜き出し、各断面の運動方程式に隣り合う断面との相互の砂のやり取り (相互作用) を取り入れた連立常微分方程式「バルハン移動方程式」を提案する。「バルハン移動方程式」では、相互作用する2次元断面の集合を3次元砂丘と考え、各断面の頂上の高さや進行方向の位置についての時間発展を調べることができる。バルハン移動方程式の導出を行う前に、バルハン衝突方程式の導出に用いた仮定について述べる。

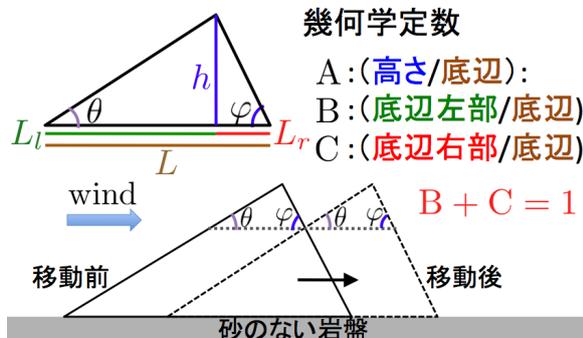


図1: バルハンの断面の類似性と、それに伴う幾何学定数

バルハンが移動する土台となる地面は砂のない水平な岩盤であり、風は一方向に吹いているものとする。図1で示すように、バルハンの断面について、風上側の傾斜角 θ 、風下側の傾斜角 φ は断面の大小に関わらず、それぞれ一定であるとする。このとき、断面の高さを h 、底辺を L として、断面の頂点から底辺に対し垂線を引き、底辺との交点より左部、右部の長さをそれぞれ L_l, L_r として、

$$A = \frac{h}{L}, B = \frac{L_l}{L}, C = \frac{L_r}{L}$$

と3つの幾何学定数 A, B, C を定義すると、 B, C の

定義から $B + C = 1$ が成り立つ。

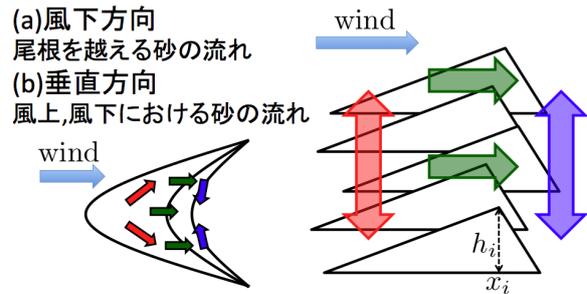


図2: 左下: バルハン上の砂の流れ、右: 断面の配置及び砂の流れ

今回、バルハン移動方程式では図2のように複数の2次元断面が相互作用しながら移動していく状態を考え、変数として各断面 i の高さ h_i とその頂点の風向き方向の位置 x_i を用いる。このような断面を風向きに対して垂直な方向に一定間隔で並べることにより、2次元断面を用いて3次元砂丘の移動を表すことが可能となる。砂丘の移動は表面の砂が流れることで起こるが、3次元砂丘を考える場合、砂の流れを図2のように、(a) 尾根を越える風下方向への砂の流れ、(b) 風上・風下における風向きに垂直方向の砂の流れに分けた。これらの流れについて説明を行う。

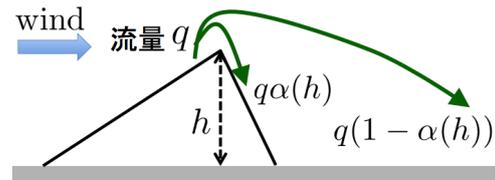


図3: 断面内で尾根を越える砂の流れ

まず、尾根を越える砂の流れは各断面内で起こり、風の強さにより流量 q が変化する。 q は断面の高さが高いと風下側の斜面に堆積しやすく、低いと下流地面へと直接流出しやすくなる。断面の高さに応じて風下側への堆積率 (捕獲率) が変化するため、高さに依存した関数 $\alpha(h)$ を使い、堆積する砂の流量を $q \alpha(h)$ 、下流へと飛ばされる砂の流量を $q(1 - \alpha(h))$ と表すことにした (図3)。また、 $\alpha(h)$ は以下の性質を持ち、

$$0 < \alpha(h) \leq 1, \lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0, \lim_{h \rightarrow \infty} \alpha(h) = 1$$

試行関数として、 $\alpha(h) = \tanh(h/5)$ を用いた。

次に、風向きに垂直な方向の砂の流れを隣り合

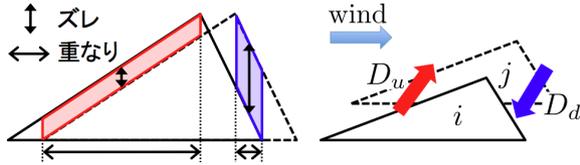


図4: 左:ズレと重なりの定義、右:流れの向き

う断面間との相互作用として取り入れ、流量は図4のように断面間のズレと重なりに依存するものと仮定した。ここで、図4左は断面の進行方向に対して垂直な方向から見たときの2断面の位置関係を表しており、風下側、風上側の各斜面における2断面間の高さ方向の差をズレ、水平方向に重なっている部分を重なりと定義している。流量はズレと重なりの積(図中の編みかけ部分)のスカラ倍(風上で ν_u 、風下で ν_d)とし、風上側斜面・風下側斜面における流量をそれぞれ高さ h と位置 x の関数

$$D_{u(j)} = D_u(h_i, h_j, x_i, x_j), D_{d(j)} = D_d(h_i, h_j, x_i, x_j)$$

として与える。流れの向きは斜面の高低差で決まり、図4における断面の位置関係では、風上で実線から点線へ、風下で点線から実線へ砂が流れる。また、スカラ一定数 ν_u, ν_d は風上・風下での砂の流れやすさを表すパラメータであり、流量を調節することが可能となる。

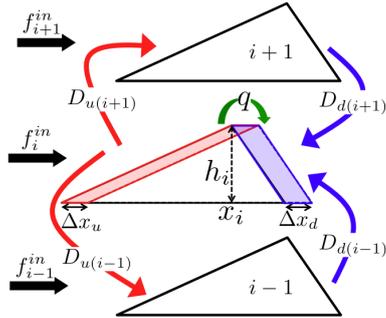


図5: 微小時間における断面*i*の浸食・堆積面積、及び砂の移動

以上のように風向き方向、風向きに垂直な方向それぞれの砂の流れを取り入れて、微小時間 Δt の間に起こる砂の移動と斜面の浸食・堆積面積を用い、 i 番目の断面の高さ h_i とその頂点の位置 x_i に関する微分方程式を導出していく。まず、 Δt の間に風上側、風下側の斜面がそれぞれ水平方向に $\Delta x_u, \Delta x_d$ だけ移動し、高さ、進行方向の位置はそれぞれ $\Delta h_i, \Delta x_i$ だけ変化したと考える(図5)。断面*i*における風上斜面の浸食面積(図中の編みかけ部分)は、尾根を超

える砂の量と風上における隣り合う断面 $i-1, i+1$ との砂のやり取りの和に等しくなるので、

$$\frac{2h_i + \Delta h_i}{2} \Delta x_u = \Delta t (q + D_{u(i-1)} + D_{u(i+1)}) \quad (1)$$

が成り立つ。同様に、風下斜面の堆積面積についても、

$$\frac{2h_i + \Delta h_i}{2} \Delta x_d = \Delta t (q - (h_i) + D_{d(i-1)} + D_{d(i+1)}) \quad (2)$$

が成り立つ。そして、 $\Delta h_i, \Delta x_i$ は幾何学定数を用いて、 $\Delta h_i = A\Delta x_d - A\Delta x_u, \Delta x_i = B\Delta x_d + C\Delta x_u$ と表すことができ、式(1),(2)と $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとることで、

$$\frac{dh_i}{dt} = \frac{A}{h_i} \left(q - (h_i) + \sum_{j=i-1, i+1} (D_{d(j)} - D_{u(j)}) \right)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{h_i} \left(q(B - (h_i) + C) + \sum_{j=i-1, i+1} (BD_{d(j)} + CD_{u(j)}) \right)$$

が得られ、上の式に外部からの砂の流入 f_i^{in} を考慮した式がバルハン移動方程式である。

3 計算結果

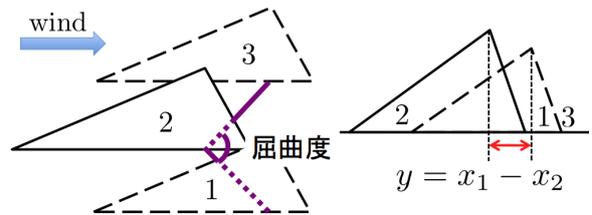


図6: 左:屈曲度、右:屈曲度の指標 y

シミュレーションは、3つの2次元断面が相互作用した系で行い、断面1,3は断面2を挟んで対称な位置($h_1 = h_3, x_1 = x_3$)にあるとし、断面の高さの初期値は、 $h_2(0) = 10, h_1(0) = 8$ とする。そして、図6のように x_1, x_2, x_3 を結んで生じる角度を屈曲度と呼び、屈曲度の指標として、新たに変数 $y = x_1 - x_2$ を用いることにした。また、複数のバルハンから構成されるバルハンネットワークでは、各バルハンは風上にある他のバルハンから逃げた砂を受け取ることが起きている。外部からの砂の流入とバルハンからの砂の流出は常に等しいものとは限らないが、今回は定常状態でのバルハンの形状に注目するため、下流地面への砂の流出と上流からの砂の流入が等しいと考えた。つまり、外部からの

砂の流入は

$$f_2^{in} = \sum_{i=1}^3 q(1 - (h_i)), f_1^{in} = f_3^{in} = 0$$

となる。以上の設定のもと、パラメータ q, ν_u, ν_d 、初期屈曲度の指標 y_0 を変化させ、断面の振る舞いについて調べた。断面の振る舞いは、(1) 各断面が一定の差を保ちながら移動する「安定」、(2) 断面間の差が周期的に変動する「振動」、(3) ある断面の高さが0となり消失する「不安定」の3つに分類することができる。安定性の初期値・パラメータ依存について調べるため、i) q, ν_d を固定し y_0, ν_u を変化させることで「安定」が得られる領域の特定、及び、ii) q, ν_u の変化による最終屈曲度 y の変化に関する相図を作成した。

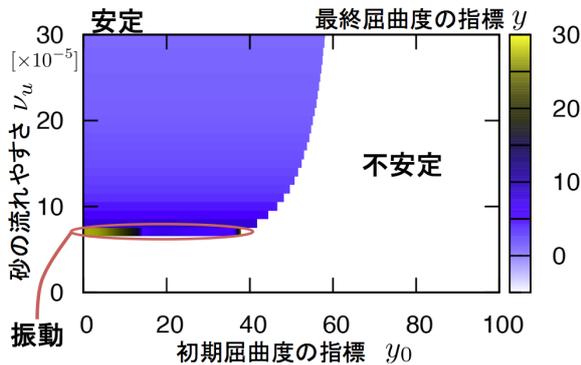


図 7: i) $q = 0.1, \nu_d = 2.0 \times 10^{-4}$ の場合の安定領域

i) 図 7 は、 $q = 0.1, \nu_d = 2.0 \times 10^{-4}$ の場合の安定領域を示しており、横軸に初期屈曲度の指標 y_0 、縦軸に風上での砂の流れやすさ ν_u を表している。図中の白い範囲は「不安定」であり、青い範囲は「安定」であるが、赤い楕円で囲んでいる範囲 ($\nu_u = 7.0 \times 10^{-5}$) では「振動」がみられた。しかし、「振動」は実際の現象でみられず現実的でない。 ν_u を増加させることで、「安定」が得られる領域が増加するとともに、 y の値が 0 に近づくことが分かる。また、「不安定」と「安定」が切り替わる境界に「振動」が存在している。

ii) 図 8 は、 $\nu_d = 2.0 \times 10^{-4}, y_0 = 0$ の場合の安定領域を示しており、横軸に尾根を超える砂の量 q 、縦軸に風上での砂の流れやすさ ν_u を表している。断面の振る舞いは図 7 と同じである。相互作用を強くすることで「安定」が得られる領域が線形に増加しており、「不安定」と「安定」が切り替わる境界に「振動」が存在している。また、 q を大きくす

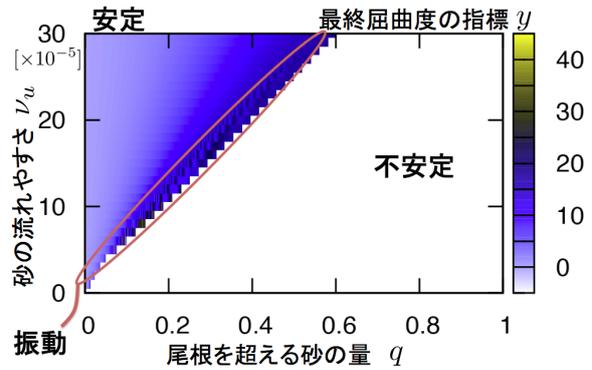


図 8: $\nu_d = 2.0 \times 10^{-4}, y_0 = 0$ の場合の安定領域

ることで y の値が増加することが分かる。これは、 q が風の強さに対応しているので、風の強さに応じて屈曲度が増加することを示している。

4 まとめと今後の展望

今回、我々は砂丘の移動を 2 次元断面の結合系で表現する数理モデルで記述し、3 断面の場合で解析をおこなった。その結果、ある一定の屈曲度内の初期状態では安定な形状を維持でき、風を強くすることで屈曲度が鋭くなることが分かった。また、安定領域は断面間の相互作用を強くすることで増加することが得られた。今後、断面数を増加させた場合の形状、安定性解析や、試行関数として定義した断面間の砂の流量 D_u, D_d を実際の砂丘上の流量と対応させるために、DEM・流体 (SPH) を用いたシミュレーションから、砂丘上の横方向の砂の流れのデータを調べる必要があると考えている。

参考文献

- [1] May C. Bourke, Andrew S. Goudie, (2009), *Aeolian Research*
- [2] B. Andreotti, P. Claudin, and S. Douady (2002), *Eur. Phys. J. B* **28** 321
- [3] A. Katsuki, H. Nishimori, N. Endo and K. Taniguchi (2005), *JPSJ* **74** 1
- [4] A. Katsuki, M. Kikuchi and N. Endo (2005), *JPSJ* **74** 878
- [5] 坪田誠, 西森拓 (2008), 「量子渦のダイナミクス/砂丘と風紋の動力学」, 培風館
- [6] H. Nishimori, A. Katsuki and H. Sakamoto (2009), *Theoretical and Applied Mechanics Japan* **57** 174