

# ゆずりあいのダイナミクス

巖佐正智

名古屋大学 理学研究科 物質理学専攻 物理系

Tv

長椅子に人が次々と座ってゆくときに、一人でも多くの人が座れるように、座っている人がずれて、新たに人が座ってゆく様子を記述するモデルを提案する。見方を変えれば、相互作用する粒子系の吸着モデルだと捉えられる。具体的な系に対して、モデルの解を求めるとともに、初期状態として一様分布を仮定して、最終的な状態に関する確率分布を求める。

## The dynamics of human behavior on a bench

Masatomo Iwasa

Department of Physics Nagoya University

### Abstract

A model for the dynamics which explain phenomena occurring when people are sitting on a bench is presented. This model is also regarded as a model for the adsorbing process of interacting particles. For a simple system, the solution of this dynamics and the probability of final states is given.

## 1 はじめに

長椅子に人が座ってゆく様子を眺めていると、長椅子の規定の人数が座ることもあれば、より少ない人数しか座っていないにも拘らず、それが終状態となることがある。このように異なる終状態が現れることは、どのように説明すればよいだろうか。

長椅子に人が次々に座ってゆき、座るスペースがなくなった状況の下では、座っている人は、立っている人が一人でも多く座れるように、中途半端に空いているスペースを詰めて座り直す。すると、新たに空いたスペースができて、そこにさらに人が座ることが出来る場合がある。

図1のような状況を考える。図1は五人掛けの椅子に既に三人座っている状態を表しており、これ以上人が座るスペースが無い。ところが、1番の人が左に動けば、下の図の様にもう一人座るスペースが生じる。この後、どの人が動いても、もう一人座れるだけのスペースは生じないことに注意しておく。

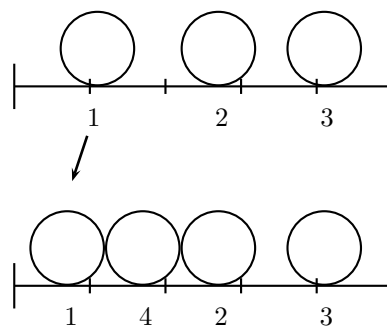


図1

では、モデルの設定のため、誰がどのように動くかと仮定するべきかを一般的に考えてゆく。

もしある人の両側に空いているスペースがあれば、より多くの人が座れる様に配慮する結果として、その人は広い方のスペースをさらに広げるように移動すると仮定する。

では、座っている人のうち、どの人がはじめに動くのだろうか。はじめに動くのは、最もたくさんのスペースを占有してしまっている人だと仮定する。

人々により大きな譲り合いの気持ちを駆り立てるのは、人がより多くのスペースを占有している場合だと仮定するのは自然であろう。

現実にかかる現象を厳密に再現するには、人の心理や個体差など、モデルに採り入れるべき要素は限りなくあるが、上で例に挙げた二つの作用が、譲り合いに基づくダイナミクスにおいて本質的な役割を果たしており、特にモデルに採り入れられるべきことである。そして重要なことは、これらを採り入れるだけでも、終状態の多様性が説明されることである。

## 2 モデルの導入

上で述べた性質を持つモデルを定義する。

系は1次元の有限区間である。ここに大きさ1の粒子を詰めてゆく様子を考える。ダイナミクスの初期状態は粒子を詰めるスペースが系のどこにも空いていない状態とする。つまり、どのスペースも1より小さい状態を初期状態に選ぶ。

時間発展ルールを次のように決める：

(I) 両側のスペースを足して、その和が最も大きい値を持つ粒子が動く。

(II) 粒子が動く際にはより小さいスペースの方に動く。

(III) 動く粒子は、粒子1個分のスペースが空けばそこで止まり、空いたスペースには粒子を加える。

(IV) 動くことができない粒子に関しては、(I)で値を比べる対象としない。

## 3 モデルの数学的記述

上で定義したモデルを数学的取り扱いがしやすいように定式化しよう。

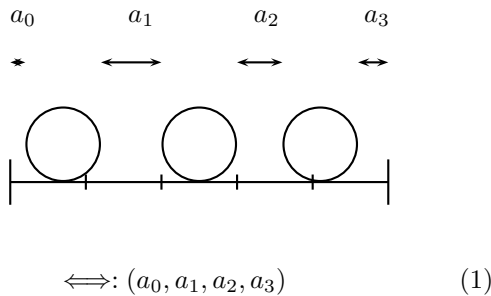


図2

系に  $n$  個の粒子が入っている状態は  $\mathbb{R}^{n+1}$  の元と同一視されることに注意しよう。つまり、粒子間の距離と壁と粒子の間の距離を左端から順に並べることにより、状態を表現することができる。

以下では

$l$ : 系の長さ、

$n_i$ : 始状態の粒子数、

$n_f$ : 終状態の粒子数、

$\tau: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  or  $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ; 時間発展作用素、

と定義する。

モデルの定義より、初期状態が  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  と表されるとき、

$$0 < a_i < 1 \text{ for all } i, \quad \sum_{i=0}^{n_i} a_i = l - n_i \quad (2)$$

を満たす。

この記述法を採用すれば、上で定義したダイナミクスは任意の時刻において以下のように書き換えられる。まず状態  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  に対して、

$$a_{j-1} + a_j := \max_{k \text{ s.t. } a_{k-1} \text{ and } a_k \neq 0} [a_{k-1} + a_k] \quad (3)$$

として  $j$  を定義する ( $j = 1, 2, \dots, n$ )。このとき、時間発展作用素  $\tau$  の作用は具体的に次の4通りの場合に分けて書かれる。

(i)  $a_{j-1} + a_j < 1$  かつ  $a_{j-1} < a_j$  のとき、 $\tau: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}: (a_0, \dots, a_n) \mapsto (a'_0, \dots, a'_n)$  の作用は

$$a'_i = a_i, (i = 0, \dots, j-2) \quad (4)$$

$$a'_i = 0, (i = j-1) \quad (5)$$

$$a'_i = a_{i-1} + a_i, (i = j) \quad (6)$$

$$a'_i = a_i, (i = j+1, \dots, n). \quad (7)$$

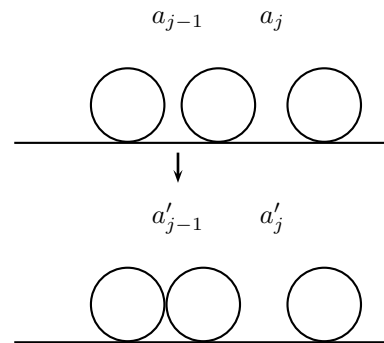


図3

(ii)  $a_{j-1} + a_j < 1$  かつ  $a_{j-1} > a_j$  のとき、 $\tau: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}: (a_0, \dots, a_n) \mapsto (a'_0, \dots, a'_n)$  の作

用は

$$a'_i = a_i, (i = 0, \dots, j-2) \quad (8)$$

$$a'_i = a_i + a_{i+1}, (i = j-1) \quad (9)$$

$$a'_i = 0, (i = j) \quad (10)$$

$$a'_i = a_i, (i = j+1, \dots, n). \quad (11)$$

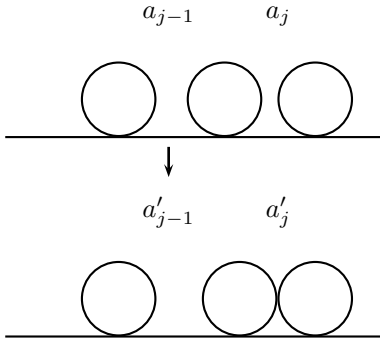


図4

(iii)  $a_{j-1} + a_j > 1$  かつ  $a_{j-1} < a_j$  のとき,  $\tau : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2} : (a_0, \dots, a_n) \mapsto (a'_0, \dots, a'_{n+1})$  の作用は

$$a'_i = a_i, (i = 0, \dots, j-2) \quad (12)$$

$$a'_i = a_i + a_{i+1} - 1, (i = j-1) \quad (13)$$

$$a'_i = 0, (i = j, j+1) \quad (14)$$

$$a'_i = a_{i-1}, (i = j+2, \dots, n+1). \quad (15)$$

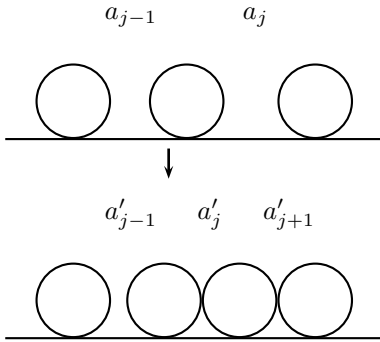


図5

(iv)  $a_{j-1} + a_j > 1$  かつ  $a_{j-1} > a_j$  のとき,  $\tau : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2} : (a_0, \dots, a_n) \mapsto (a'_0, \dots, a'_{n+1})$  の作用は

$$a'_i = a_i, (i = 0, \dots, j-2) \quad (16)$$

$$a'_i = 0, (i = j-1, j) \quad (17)$$

$$a'_i = a_{i-2} + a_{i-1} - 1, (i = j+1) \quad (18)$$

$$a'_i = a_{i-1}, (i = j+2, \dots, n+1). \quad (19)$$

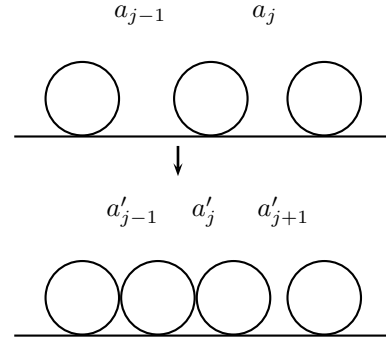


図6

動かす粒子が無くなった時が終状態である。このとき全ての粒子は他のある粒子と隣接していることが簡単に判るが、これは現実に見られる現象に合っていないように見える。より現実に合わせてみるならば、 $a_{j-1} + a_j$  がある閾値を超えたときだけ、 $\tau$  が作用するようなダイナミクスに変更すればよい。ただ、取り扱いのしやすさを優先して、ここでは相当する閾値は設けないこととする。

## 4 モデルの性質

モデルの性質として次のようなものが挙げられる。

(I) 不可逆性

異なる二つの状態

$$(a_0, \dots, a_{j-1}, a_j, \dots, a_n), \quad (20)$$

$$a_{j-1} + a_j := \max[a_{k-1} + a_k] \text{ と}$$

$$(b_0, \dots, b_{j-1}, b_j, \dots, b_n), \quad (21)$$

$$b_{j-1} + b_j := \max[b_{k-1} + b_k] \text{ は}$$

$$a_k = b_k, (k = 0, \dots, j-2, j+1, \dots) \quad (22)$$

$$a_{j-1} + a_j = b_{j-1} + b_j \quad (23)$$

をみたすとき、たとえ  $a_{j-1} \neq b_{j-1}$ ,  $a_j \neq b_j$  でも、時間発展作用素  $\tau$  の作用の結果同じ状態へと写される。つまり  $\tau$  は不可逆な写像である。

(II) 系の可分性

モデルの解析に有力な助けとなる性質がある。それは2個の粒子は一度隣接すると離れないということである。つまり、 $(a_0, \dots, a_p, 0, b_0, \dots, b_q)$  という系があれば、0の右側と左側の系を独立に考えて系の時間発展を知ることができる。この場合、長さ  $l_1 = p + \sum_{i=0}^p a_i$  に  $n_1 = p$  個の粒子がある系と、長さ  $l_2 = q + \sum_{i=0}^q b_i$  に  $n_2 = q$  個の粒子がある系の時間発展を独立に考えて終状態を求めれば、系全体の終状態を求めることができることとなる。

## 5 $l = 5$ の場合

系が粒子5個分の長さの時に解を求めよう。この場合、「解を求める」とは初期状態として取り得る各状態に対して、終状態の個数を求めることである。言い方をかえれば、初期状態を指定するパラメータ空間の中で、 $n_f$  の値に関して相図を描くことであるともいえる。

この系に対し、始状態の個数  $n_i$  として取り得る値は、 $n_i = 3, 4$  であり、終状態の個数  $n_f$  として取り得る値は、 $n_f = 4, 5$  である。

結果を記すと、解は次のようになる:

$n_i = 3$  のとき、

- (i)  $1 + a_3 < a_0 + a_1 < 1 + a_2, a_1 < a_0$   
and  $a_2 < a_0$
- (ii)  $0 < a_0 + a_1 < 1 + a_3, a_1 < a_0$   
and  $a_3 < a_2 < a_0$
- (iii)  $1 + a_0 < a_3 + a_2 < 1 + a_1, a_2 < a_3$   
and  $a_1 < a_3$
- (iv)  $0 < a_3 + a_2 < 1 + a_0, a_2 < a_3$   
and  $a_0 < a_1 < a_3$

であれば、 $n_f = 5$  となり、その他の場合は  $n_f = 4$  となる。ここで、 $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  は初期状態を表しており、 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 2$  かつ  $0 < a_i < 1, i = 0, 1, 2, 3$  をみたく。

$n_i = 4$  のとき任意の初期状態に対して  $n_f = 4$  となる。

証明は場合分けに基づく直接的な計算によるが割愛する。

## 6 終状態の確率分布

次にそれぞれの終状態が現れる確率を求める。引き続き  $l = 5$  の場合について、粒子の配置に関して一様分布を仮定し、終状態の個数が  $n_f = 4, 5$  となる確率を求めよう。

一様分布の下で各初期状態の実現する確率は一般的に求められており [1]、それを用いて  $n_i = 3, 4$  となる確率  $P_3, P_4$  をそれぞれ求めると、

$$P_3 = \frac{1}{2}, P_4 = \frac{1}{2} \quad (24)$$

となる。

$n_f = 5$  となるのは、前節 (i)、(ii)、(iii)、(iv) のときである。 $\sum_{i=0}^3 a_i = 2$  を用いて、 $(a_0, a_1, a_2)$  空

間でのそれぞれの (i)、(ii)、(iii)、(iv) の領域の体積を求めることで、 $n_i = 3$  の際の条件付き確率が求められ、 $P_3$  との積から  $n_f = 5$  となる確率を求めることができる。結果のみを記すと終状態が  $n_f$  個となる確率  $p(n_f)$  は、

$$p(5) = \frac{23}{288} \quad (25)$$

$$p(4) = \frac{265}{288} \quad (26)$$

となる。

## 7 まとめ

ここで示された結果は、筆者の経験には合致しているものの、数多くの実験に基づいているわけではなく、その意味で必ずしも現象を十分に検証しているとは言えない。しかし、この最低限の仮定の下で構成されたダイナミクスは、終状態の非自明な多様性を説明しているといえるだろう。一般に、人間の活動により起こる現象を説明する場合には、個性や個体差が大切であるように思われ、実際その影響も大きいはずだが、そのような個別の性質を考えなくとも、終状態の違いが説明されている。

物理学の観点からは素直に考えられることだが、この系は、時間発展する相互作用のある多粒子系の一つの吸着モデルとなっている [2]。例で見たように、このモデルは解析的に調べられるという取り扱いのしやすさが一つの特長である。このダイナミクスの時間発展ルールは単純なので、他にもこのダイナミクスで記述される系があるかもしれない。今回はゆずりあいを説明するために短距離にはたらく引力の相互作用が入っているが、相互作用の入れ方を変えることにより、他の現象を説明するモデルになりうる可能性を秘めている。

## 参考文献

- [1] M. Iwasa and K. Fukuda, arXiv: 0810.5632
- [2] J. W. Evans, Rev. Mod. Phys. **65** 1281,(1993)