

拡張 OV 模型の線形解析

愛知大学 長谷部 勝也 岐阜経済大学 中山 章宏 名古屋大学 杉山 雄規

我々は次のような拡張 OV 模型を提案する。

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = a \left[V(\Delta x_{n+k_+}, \dots, \Delta x_{n+1}, \Delta x_n, \Delta x_{n-1}, \dots, \Delta x_{n-k_-}) - \frac{dx_n}{dt} \right] \quad (1)$$

$\Delta x_{n+k} \equiv x_{n+k+1} - x_{n+k}$ for $k = k_+, k_+ - 1, \dots, -k_-$ 。即ち一変数の OV 関数 $V(\Delta x_n)$ を $k_+ + k_- + 1$ 変数関数に拡張するのである。ここで $\Delta x_{n+k_+}, \dots, \Delta x_n$ は注目する車両より前方に位置する車両とその車両の直前の車両との車間距離である。当然 $\Delta x_{n-1}, \dots, \Delta x_{n-k_-}$ は注目する車両の後方に位置する車両のそれである。OV 模型は $k_+ = k_- = 0$ に対応する。OV 模型も拡張模型 (1) も一様流解 $x_n = bn + V(b)t$ 及び $\dot{x}_n = bn + V(b, b, \dots, b)t$ を持つ。ここで b は車間距離である。我々は拡張模型と OV 模型、あるいはタイプの違った拡張模型相互を比較したいので、比較の基準として一様流解が全ての模型で同じであると言う要請を置く。即ち任意の $0 < b$ について

$$V(b, \dots, b) = V(b) \quad (2)$$

以下、周期境界条件 $x_{N+1} \equiv x_1$ を想定する。一様流解からの微小なずれを y_n と書く。(1) 式の線形近似は $\Delta y_{n+k} = y_{n+k+1} - y_{n+k}$ として

$$\ddot{y}_n = a \left[\sum_{k=-k_-}^{k=k_+} f_k \Delta y_{n+k} - \dot{y}_n \right], \quad (3)$$

である。 f_k は $f_k = \frac{\partial}{\partial \Delta y_{n+k}} V(b + \Delta y_{n+k_+}, \dots, b + \Delta y_n, \dots, b + \Delta y_{n-k_-}) \Big|_{\Delta y=0}$ である。 $k_+ \geq k \geq 0$ の場合 $f_k > 0$ であり、 $0 > k \geq k_-$ の場合に $0 > f_k$ であるとする。(2) 式によって

$$\sum_{k=-k_-}^{k=k_+} f_k = V'(b) \quad (4)$$

であるが適当な時間のスケールの変換によって一般性を失うこと無く $\sum_{k=-k_-}^{k=k_+} f_k = 1$ とすることができる。

(3) に次の解

$$y_n(t) = \exp i(n\theta - \omega(\theta)t), \quad \theta = \frac{2\pi j}{N}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (5)$$

がある。ここで $\omega(\theta)$ は

$$-\omega(\theta)^2 = a \left[\sum_{k=-k_-}^{k=k_+} f_k \{ \exp i(k+1)\theta - \exp ik\theta \} + i\omega(\theta) \right] \quad (6)$$

を満たす。これは二次方程式だから一つの θ に対して二つの根 $\omega(\theta)_\pm$ を持つ。全ての θ について $\text{Im}\omega_\pm(\theta) < 0$ なら (3) の解は安定である。この条件を破る θ に

対応する解は不安定になる。安定と不安定の境を与える条件 $\text{Im}\omega(\theta) = 0$ を満たす a を $a(\theta, f_k)$ と書くことにする。

$$a(\theta, f_k) = \frac{\left[\sum f_k \{ \sin k\theta - \sin(k+1)\theta \} \right]^2}{\sum f_k \{ \cos k\theta - \cos(k+1)\theta \}} \quad (7)$$

解の安定条件は

$$a > \max_{\theta} a(\theta, f_k) \quad (8)$$

である。条件 $\sum f_k = 1$ の下で上の右辺を最小にする問題

$$\min_{f_k} \{ \max_{\theta} a(\theta, f_k) \} \quad (9)$$

の解を「最安定係数」と呼ぶことにする。

$k_- = 0$ 即ち前方のみを参照する拡張模型 FL-OV 模型の場合の最安定係数についての数値解は

$$f_k = \frac{1}{k_+ + 1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, k_+, \quad (10)$$

を与える。

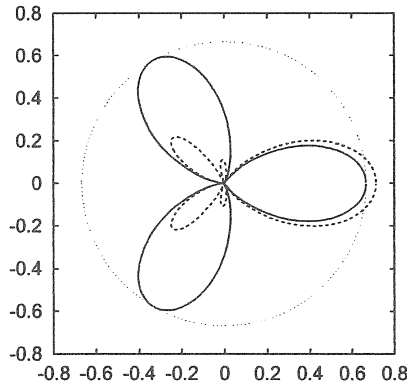


Figure 1: $a(\theta, f_k)$ の極座標表示。実線は $\{f_2, f_1, f_0\} = \{1/3, 1/3, 1/3\}$ に、鎖線は $\{0.3, 0.3, 0.4\}$ に対応する。

次に $k_+ = 0, k_- = 1$ 即ち前方一台の他、後方一台のみを見る (BL-OV) 模型を問題にする。

$$a(\theta, f_0, f_{-1}) = \frac{1}{2f_0 - 1} (1 + \cos \theta) \quad (11)$$

f_{-1} は負であるから $f_0 + f_{-1} = 1$ の条件の下に f_0 はいくらでも大きくできる。従って (9) は自明解「 $f_0 = \infty$ の時 $a_c = 0$ 」を持つ。その意味で FL-OV 模型と BL-OV 模型とは著しく違う模型である。

微少擾乱に対する拡張模型の線形応答を見る為に二種類のテスト関数を導入する。

$$A(t) = \frac{1}{\epsilon^2} \sum_n y_n^2(t), \quad B(t) = \frac{1}{\epsilon^2} \sum_n \dot{y}_n^2(t), \quad (12)$$

一様流解に対して時刻 $t = 0$ に次のような擾乱を加える。 $y_n(0) = \epsilon \delta_{n0}$, $\dot{y}_n(0) = 0$ この初期条件に対するテスト関数の振る舞いを示す。パラメータ $\alpha = 3$ として $\{f_0, f_{-1}\} = \{1.5, -0.5\}$ の BL-OV 模型と OV 模型及び $\{f_1, f_0\} = \{0.5, 0.5\}$ 即ち最安定係数を持つ FL-OV 模型を比較している。(2) 図はテスト関数 $A(t)$ の振る舞いを示す。

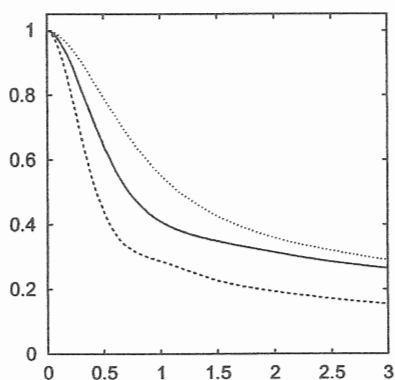


Figure 2: テスト関数 $A(t)$ の振る舞い。上から順に FL-OV 模型、OV 模型、BL-OV 模型の場合。

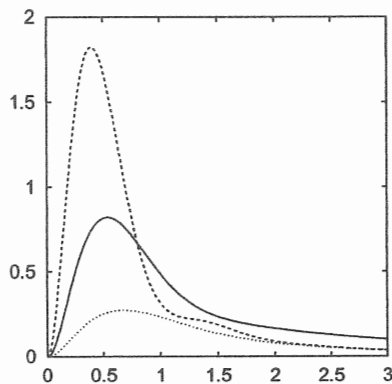


Figure 3: テスト関数 $B(t)$ の振る舞い。上から順に BL-OV 模型、OV 模型、FL-OV 模型の場合。

BL-OV 模型のダンピングが最も速いことは以前の論文で指摘した通りである。FL-OV 模型のダンピングは遅いがこのことから直ちに FL-OV 模型が劣っていると結論できない。実際、図 (3) に見る通り、FL-OV 模型の場合テスト関数 $B(t)$ は小さい値を示し BL-OV 模型の場合は大きくなる。BL-OV 模型は位置の擾乱を速やかに収束させるがその結果大きな速度の擾乱が残る。FL-OV 模型は丁度この反対の性質を持っている。この傾向はもっと複雑な拡張模型に於ても同じである。

BL-OV 模型は「硬い」制御で、その利点として位置変動を小さくするがやむを得ない代償として速度変動が大きくなる。これと対照的に FL-OV 模型は「柔らかな」制御であって速度変動を小さく押さえるが位置変動は大きい。その中間の模型、即ち何台もの前方車両と同時に何台かの後方車両を見る制御は両者の特徴を合わせ持っている。

先に与えたテスト関数 $A(t), B(t)$ を拡張して任意の非負整数 l, m について

$$F_{lm}(t) = \frac{1}{\epsilon^2} \sum_n \frac{d^l y_n(t)}{dt^l} \frac{d^m y_n(t)}{dt^m} \quad (13)$$

と定義する。この時最安定係数 $f_{k_+} = f_{k_+-1} = f_{k_+-2} = \dots = f_0 = \frac{1}{k_++1}$ を持った FL-OV 模型と $f_0 = V'(b) = 1/(k_++1)$ を持つ OV 模型のテスト関数が一致することを示す。

モード解 $y_n = \exp i(n\theta - \omega(\theta)t)$ は

$$\omega(\theta)^2 + i a \omega(\theta) + a f_0 [\exp i(k_++1)\theta - 1] = 0. \quad (14)$$

を満たす時 FL-OV 模型の線形近似

$$\ddot{y}_n = a \left[f_0 (y_{n+k_++1} - y_n) - \dot{y}_n \right]. \quad (15)$$

の解を与える。適当な初期条件を与えられた場合、(15) 式の解はモード解の線形和であって

$$y_n(t) = \sum_{\theta} Y(\omega(\theta)) \exp i(n\theta - \omega(\theta)t), \quad (16)$$

のように書ける。テスト関数は従って

$$F_{lm}(t) = \frac{1}{N} \sum_{\theta} G(\omega(\theta), t) \quad (17)$$

である。この表式は OV 模型のテスト関数にも成り立つがその場合 ω の満たす代数方程式は

$$\omega(\theta)^2 + ia\omega(\theta) + af_0 [\exp i\theta - 1] = 0, \quad (18)$$

である。但し我々は $f_0 = 1$ の約束を忘れて $f_0 = V'(b) = 1/(k_+ + 1)$ とする。さて (18) の解を $\omega^{ov}(\theta)$ とすると (14) の解は

$$\omega(\theta) = \omega^{ov}((k_+ + 1)\theta). \quad (19)$$

と書ける。従ってテスト関数 (17) を

$$F_{lm}(t) = \frac{1}{N} \sum_{\theta} G(\omega^{ov}((k_+ + 1)\theta), t). \quad (20)$$

と書くことができる。 N と $k_+ + 1$ が互いに素な整数であればこの式は

$$F_{lm}(t) = \frac{1}{N} \sum_{\theta} G(\omega^{ov}(\theta), t), \quad (21)$$

に一致し $F_{lm}(t) = F_{lm}^{ov}(t)$ を得る。一般的には N が十分大きくて和を積分で置き換えることができるとする。

$$F_{lm}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta G(\omega^{ov}((k_+ + 1)\theta), t) \quad (22)$$

$$= \frac{1}{2\pi(k_+ + 1)} \int_0^{2(k_+ + 1)\pi} d\phi G(\omega^{ov}(\phi), t) \quad (23)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi G(\omega^{ov}(\phi), t) \quad (24)$$

$$= F_{lm}^{ov}(t). \quad (25)$$

なを、ここで $\omega(\phi)$ の周期性によって (23) 式と (24) 式の等号が成り立つ。このようにして最安定 FL-OV 模型と OV 模型との擾乱に対する等価性が証明できた。

OV 模型に即して言えば f_0 が小さいことは一様流解がより安定であることを意味する。しかし、それによって流速が小さくなる。最安定 FL-OV 模型は $f_0 = 1$ の OV 模型と同じ流速を保ちながら安定性については $f_0 = 1/(k_+ + 1)$ の OV 模型と同じである。