

高次元交通流における渋滞転移

静岡大学工学部 長谷 隆

Jamming transition of high-dimensional traffic dynamics

Takashi Nagatani, Shizuoka University

1. 緒言

高速道路の車の交通を記述するモデルとして一次元交通流モデルが提案され、車の密度が高くなると交通渋滞転移が発生することが知られている。また交通渋滞は後方に伝播する密度波であり、非線形波動と非平衡相転移の二つの性質を合わせ持つ。このような交通渋滞転移を記述するいろいろな一次元モデルが提案されてきたが、都市交通網の車の流れを記述する2次元モデルは一次元モデルに比べて少ないのが現状である。

一般的に相転移は次元に強く依存するが、交通流の高次元モデルはなく渋滞転移の次元依存性は知られていない。三次元の交通流モデルは航空機の飛行や立体倉庫の物流などの応用が考えられる。本講演では一次元交通流モデルを高次元に拡張し、高次元交通流の密度波の伝播と渋滞転移について理論解析並びに数値シミュレーションを行った結果について報告する。

2. 三次元モデルと高次元モデル

はじめに三次元交通流モデルを記述し、その後高次元に一般化する。x方向に移動する車、y方向に移動する車、z方向に移動する車の三種類の車を考える。それぞれの車は方向転換をしないものとする。x、y、z方向の車の速度を $u(x,y,z,t)$ 、 $v(x,y,z,t)$ 、

$w(x,y,z,t)$ とし、x、y、z方向の車の密度を $\rho_x(x,y,z,t)$ 、 $\rho_y(x,y,z,t)$ 、 $\rho_z(x,y,z,t)$ とする。三次元交通流の連続体近似として各方向の車の連続の式が成り立つ。

$$\partial_t \rho_x(x,y,z,t) + \partial_x \rho_x(x,y,z,t)u(x,y,z,t) = 0, \quad (1)$$

$$\partial_t \rho_y(x,y,z,t) + \partial_y \rho_y(x,y,z,t)v(x,y,z,t) = 0, \quad (2)$$

$$\partial_t \rho_z(x,y,z,t) + \partial_z \rho_z(x,y,z,t)w(x,y,z,t) = 0. \quad (3)$$

各方向の交通量はある時間遅れて最適交通量に調節されるものと仮定する。各方向の交通量は以下で与える。

$$\rho_x(x,y,z,t+\tau)u(x,y,z,t+\tau), \quad (4)$$

$$= \rho_{x,0}V(\rho(x+r_0,y,z,t))$$

$$\rho_y(x,y,z,t+\tau)v(x,y,z,t+\tau), \quad (5)$$

$$= \rho_{y,0}V(\rho(x,y+r_0,z,t))$$

$$\rho_z(x,y,z,t+\tau)w(x,y,z,t+\tau), \quad (6)$$

$$= \rho_{z,0}V(\rho(x,y,z+r_0,t))$$

$$\rho(x,y,z,t) = \rho_x(x,y,z,t) + \rho_y(x,y,z,t) + \rho_z(x,y,z,t)$$

は時刻t、場所(x、y、z)での全密度、 $\rho_{x,0}$ 、 $\rho_{y,0}$ 、and $\rho_{z,0}$ はx、y、z方向の車の平均密度(初期密度)、 r_0 は平均車間距離、 $\rho_0 (= \rho_{x,0} + \rho_{y,0} + \rho_{z,0})$ 平均全密度。式(4)-

(6)はNavier-Stokesの代わりに発展方程式である。 $V(\rho(x,y,z,t))$ は最適速度関数を表す。

遅れ時間 τ は交通量が最適流量に変わるために必要な時間である。時刻 t 、場所 (x, y, z) での x 方向の車の流量 $\rho_x(x, y, z, t)u(x, y, z, t)$ は時刻 $t - \tau$ 、場所 $(x + r_0, y, z)$ での交通量 $\rho_{x,0}V(\rho(x + r_0, y, z, t - \tau))$ によって決定される。 y 方向の車、 z 方向の車に対しても同様である。上の考え方は Newell と Whitham のモデルと類似している。上の連続体モデルを格子モデルに変換する。時間と空間微分を以下のように差分に置き換える。

$$\partial_x \rho_x(x, y, z, t) \equiv \frac{\rho_x(x, y, z, t + \tau) - \rho_x(x, y, z, t)}{\tau}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \partial_x \rho_x(x, y, z, t)u(x, y, z, t) \\ \equiv \frac{\rho_x(x, y, z, t)u(x, y, z, t) - \rho_x(x - r_0, y, z, t)u(x - r_0, y, z, t)}{r_0} \end{aligned} \quad (8)$$

平均車間距離 r_0 を平均密度の逆数 $1/\rho_0$ で置き換え、三次元交通流を格子間隔 $1/\rho_0$ の立方格子で考えると、次の差分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \rho_{x,j,m,n}(t + \tau) - \rho_{x,j,m,n}(t) \\ + \tau \rho_0 [\rho_{x,j,m,n}(t)u_{j,m,n}(t) - \rho_{x,j-1,m,n}(t)u_{j-1,m,n}(t)] = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\rho_{x,j,m,n}(t + \tau)u_{j,m,n}(t + \tau) = \rho_{x,0}V(\rho_{j+1,m,n}(t)), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \rho_{y,j,m,n}(t + \tau) - \rho_{y,j,m,n}(t) \\ + \tau \rho_0 [\rho_{y,j,m,n}(t)v_{j,m,n}(t) - \rho_{y,j,m-1,n}(t)v_{j,m-1,n}(t)] = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\rho_{y,j,m,n}(t + \tau)v_{j,m,n}(t + \tau) = \rho_{y,0}V(\rho_{j,m+1,n}(t)), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \rho_{z,j,m,n}(t + \tau) - \rho_{z,j,m,n}(t) \\ + \tau \rho_0 [\rho_{z,j,m,n}(t)w_{j,m,n}(t) - \rho_{z,j,m,n-1}(t)w_{j,m,n-1}(t)] = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\rho_{z,j,m,n}(t + \tau)w_{j,m,n}(t + \tau) = \rho_{z,0}V(\rho_{j,m,n+1}(t)), \quad (14)$$

ここで $\rho_{x,j,m,n}(t)$ は時刻 t 、サイト (j, m, n) での x 方向の車の密度、 $\rho_{j,m,n}(t)$ は全密度 $\rho_{j,m,n}(t) = \rho_{x,j,m,n}(t) + \rho_{y,j,m,n}(t) + \rho_{z,j,m,n}(t)$ である。最適速度として以下の関数を採用する。

$$V(\rho_{j,m,n}(t)) = 1.0 - \tanh\left(\frac{\rho_{j,m,n}(t) - \rho_c}{\rho_0}\right), \quad (15)$$

この関数は ρ_c で変曲点をもつ。式 (10) を式 (9) に、(12) を (11) に、(14) を (13) に代入して車の密度方程式を得る。

$$\begin{aligned} \rho_{j,m,n}(t + 2\tau) - \rho_{j,m,n}(t + \tau) \\ + \tau \rho_0 \rho_{x,0} [V(\rho_{j+1,m,n}(t)) - V(\rho_{j,m,n}(t))] \\ + \tau \rho_0 \rho_{y,0} [V(\rho_{j,m+1,n}(t)) - V(\rho_{j,m,n}(t))] \\ + \tau \rho_0 \rho_{z,0} [V(\rho_{j,m,n+1}(t)) - V(\rho_{j,m,n}(t))] = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

次に d 次元 $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_d)$ における交通流を考える。 n 方向に移動する車の速度を $u_n(x_1, x_2, \dots, x_d, t)$ 、密度を $\rho_n(x_1, x_2, \dots, x_d, t)$ とすると連続の式は以下となる。

$$\begin{aligned} \partial_n \rho_n(x_1, x_2, \dots, x_d, t) \\ + \partial_n \rho_n(x_1, x_2, \dots, x_d, t)u_n(x_1, x_2, \dots, x_d, t) = 0 \end{aligned} \quad \text{for } n=1, 2, 3, \dots, d, \quad (17)$$

ここで $\partial_n = \partial / \partial x_n$ 。

n 方向の車の交通量は以下で与えられるものとする。

$$\begin{aligned} \rho_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_d, t + \tau) \\ \cdot u_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_d, t + \tau) \\ = \rho_{n,0}V(\rho(x_1, x_2, \dots, x_n + r_0, \dots, x_d, t)) \end{aligned} \quad \text{for } n=1, 2, 3, \dots, d, \quad (18)$$

$\rho(x_1, x_2, \dots, x_d, t) = \sum_{n=1}^d \rho_n(x_1, x_2, \dots, x_d, t)$ 全密度、 $\rho_{n,0}$ は平均密度である。これを差分方程式に変換する。

$$\begin{aligned} & \rho_{n,x_1,x_2,\dots,x_d}(t+\tau) - \rho_{n,x_1,x_2,\dots,x_d}(t) \\ & + \tau \rho_0 [\rho_{n,x_1,x_2,\dots,x_d}(t) u_{n,x_1,x_2,\dots,x_d}(t) \\ & - \rho_{n,x_1,x_2,\dots,x_d-1,-x_d}(t) u_{n,x_1,x_2,\dots,x_d-1,-x_d}(t)] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \rho_{n,x_1,x_2,\dots,x_d}(t+\tau) u_{n,x_1,x_2,\dots,x_d}(t+\tau) \\ & = \rho_{n,0} V(\rho_{x_1,x_2,\dots,x_d+1,-x_d}(t)) \end{aligned}$$

for $n=1,2,3,\dots,d$ (20)

式(20)を(19)に代入し、 n について和をとると、 n 次元交通流の密度方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \rho_{x_1,x_2,\dots,x_d}(t+2\tau) - \rho_{x_1,x_2,\dots,x_d}(t+\tau) \\ & + \sum_{n=1}^d \tau \rho_0 \rho_{n,0} [V(\rho_{x_1,x_2,\dots,x_d+1,-x_d}(t)) \\ & - V(\rho_{x_1,x_2,\dots,x_d-1,-x_d}(t))] = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

3. シミュレーション結果

1、2、3、4次元の交通流に対してシミュレーションを行った。ここでは3次元の結果のみを示す。図1に $y=z=20$ の x 方向道路上での時空渋滞パターンを示す。灰色の所が高密度の渋滞を表す。図2に $z=20$ と $y=20$ の平面上での空間渋滞パターンを示す。十分時間が経過すると渋滞は平面波として $(-1,-1,-1)$ 方向に伝播する。図3に十分時間が経過した後の x 方向道路上($y=z=20$)密度分布を示す。密度波はキंकであり、その密度を図4にプロットした。丸印がシミュレーション結果であり、実線が理論相分離線を、破線が中立安定曲線を示す。三次元交通流の相分離線は一次元交通流の相分離線と一致する。

4. TDGL方程式

d 次元交通流の理論解析を行う。まず線形安定解析を行うと、次の条件が満足され

ると、一様流は不安定となる。

$$\tau > -\frac{1}{3\rho_0^2 V''} \quad (22)$$

この条件は次元に依らず、一次元の場合と同じである。臨界点は $(\rho_c, \tau_c = 1/3)$ となる。

次に臨界点近傍の長波長モードの挙動を考える。臨界点からのずれを表すパラメータを導入する： $\tau/\tau_c = 1 + \varepsilon^2$ 。ゆっくりと変化する時空変数を以下に定義する：

$$X = \varepsilon(x_1 + x_2 + \dots + x_d + bt), \quad T = \varepsilon^3 t.$$

臨界密度近傍での密度変化を考えて、密度を以下のようにおく：

$$\rho_{x_1,x_2,\dots,x_d}(t) = \rho_c + \varepsilon R(X, T).$$

ε の5次のオーダーまでの摂動展開を行い、整理すると次式が得られる：

$$\begin{aligned} \partial_t S = & (\partial_x - \frac{1}{2} \partial_x^2) \left[\frac{(-\rho_c^2 V''')}{27} \partial_x^2 S \right. \\ & \left. + (-\rho_c^2 V''') \left(\frac{\tau}{\tau_c} - 1 \right) S - \frac{\rho_c^2 V''''}{6} S^3 \right] \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、次のように熱力学ポテンシャルを定義する：

$$\phi(S) = -\frac{(-\rho_c^2 V''')}{2} \left(\frac{\tau}{\tau_c} - 1 \right) S^2 + \frac{\rho_c^2 V''''}{24} S^4.$$

式(23)はTDGL方程式である。

熱力学ポテンシャルをオーダーパラメータ S で微分することによって共存曲線、スピノーダル線及び臨界点が計算できる。3次元の交通流に対する結果は図4に実線(共存曲線)及び破線(スピノーダル線)を示す。また同じような摂動展開によって修正KdV方程式も導くことができる。このTDGL方程式は一次元の場合と同じであり、次元に依らない。

参考文献

- (1) T.Nagatani, Thermodynamic theory for jamming transition in traffic flow, Phys. Rev. E58, 4271 (1998).
- (2) T.Nagatani, Jamming transition in two-dimensional traffic flow model, Phys. Rev. E59, 4857 (1999).
- (3) T.Nagatani, Jamming transition of high-dimensional traffic dynamics, Physica A272, 592 (1999).
- (4) T.Nagatani, Jamming transition in traffic flow on triangular lattice, Physica A271, 200 (1999).

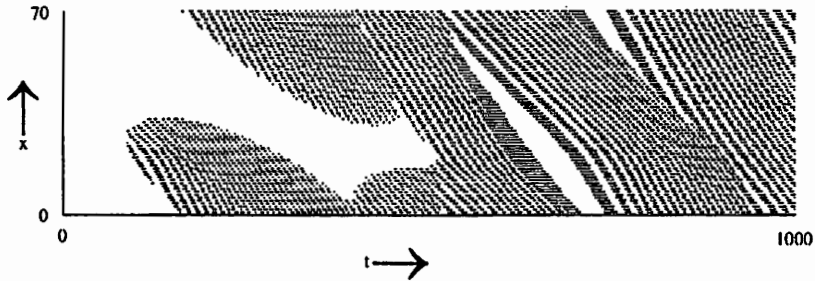


図1 $y = z = 20$ の x 方向道路上での渋滞パターン。灰色の所が高密度の渋滞。

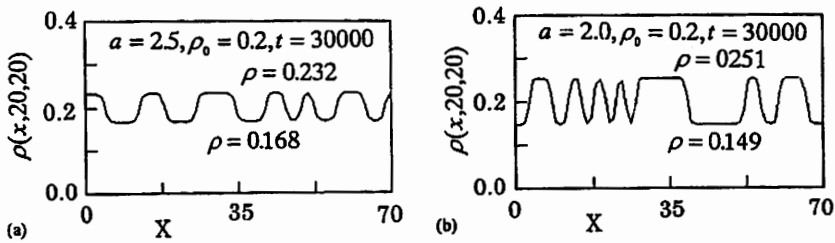


図3 $y = z = 20$ の x 方向道路上での密度プロフィール。

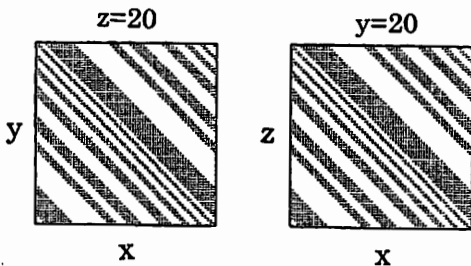


図2 $z = 20$ の (x, y) 上での渋滞パターンと $y = 20$ の (x, z) 上での渋滞パターン。

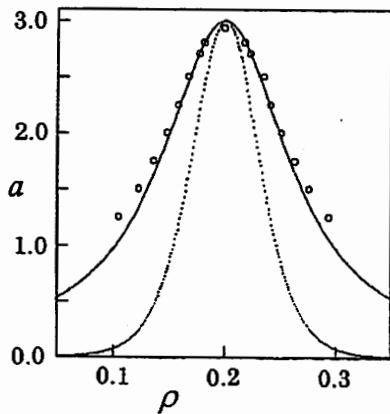


図4 (ρ, a) 面上での相図。