

# 交通流模型の一体近似とロンド方程式

中西健一（京大理）、五十嵐尤二（新潟大教育）、伊藤克美（新潟大教育）、坂東昌子（愛知大教養）

## 1 ロンドアプローチ：「今のあなたは未来のわたし」

最適速度 (Optimal Velocity, OV) 関数  $V(\Delta x)$  を導入した交通流の車両追従モデル (OV モデル) [1, 2]

$$\frac{1}{a} \ddot{x}_n(t) + \dot{x}_n(t) = V(\Delta x_n(t)) \quad (1)$$

は自発的渋滞形成を引き起こすことが、数値シミュレーションによって知られている。ここで  $x_n(t)$  は時刻  $t$  における  $n$  番目の車の位置、 $\Delta x_n(t) \equiv x_{n-1}(t) - x_n(t)$  はこの車の前方車間距離、 $a$  は運転者の反応の機敏さを表すパラメータであり、OV 関数  $V(\Delta x)$  は車間距離に対して単調に増加する最適速度を表している。各車両は実際の速度と最適速度の差に比例した加減速を行う。文献 [1] の線形解析およびシミュレーションから、感度  $a$  が OV 関数の最大の傾きの 2 倍より小さいとき、自発的渋滞形成が起こることが知られている。

このとき、車間距離-速度 ( $\Delta x$ - $v$ ) の平面に車両の動きを plot すると、渋滞形成が完了していく過程で、図 1 (左) の太線のような closed curve に収束していくのが観察される。この「limit cycle」において、C および F と書かれている点は渋滞走行および自由走行に相当する等速等間隔の一樣流の部分で、車両の代表点は「limit cycle」を反時計回りに移動しながら、これらの点を交互に訪れる。C および F の車間距離と速度 ( $\Delta x_C, v_C$ ) および ( $\Delta x_F, v_F$ ) と表すことにすると、それらの値や「limit cycle」自身の形状は感度  $a$  と  $V(\Delta x)$  を与えてシミュレーションを行うと unique に定まる。

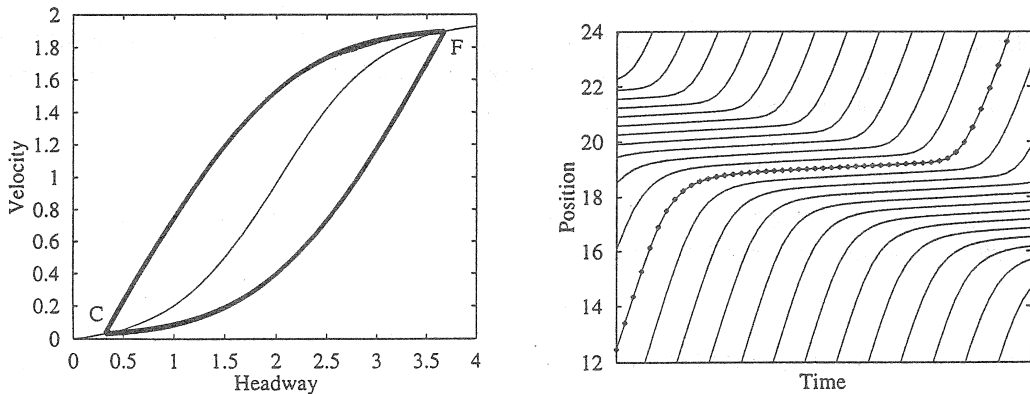


図 1: OV 関数  $V(\Delta x) = \tanh(\Delta x - 2) + \tanh(2)$ 、感度  $a = 1.0$ 、車両台数 20 台での、サーキット上 (長さ 40) のシミュレーションの結果。(左) 車間距離-速度平面での「limit cycle」(太線) と OV 関数 (細線)。(右) 渋滞部分近傍での車両の挙動。点線は特定の一台 ( $x_n$ ) の軌跡。

追従方程式 (1) は多自由度の非線形方程式なので数値的に解く以外に「limit cycle」の形状を決めることは難しいように思われていたが、OV 関数が区分線形関数であるような簡単な場合に、渋滞形成が完了した時点での車の挙動 (「limit cycle」) を解析的に解くことに成功した [3]。

シミュレーションで渋滞流形成が安定化した後の各車の挙動を観察すると、図 1 (右) のように、車  $x_n$  の速度は先行車  $x_{n-1}$  の速度をある一定時間  $T$  後に繰り返しており、形成された渋滞縞は一定の速度  $v_B$  で後退していることがわかる。この性質を ansatz として OV モデルの運動方程式 (1) に代入することで、多体問題である追従方程式 (1) を、一つの universal な関数に対する差分微分方程式に還元することが可能である。挙動の遅れ  $T$ 、渋滞の後退速度  $v_B$  は渋滞流を特徴づけるパラメータであり、感度  $a$  のみで決まると考えられるが、今までのところシミュレーションをしてみるまでは決められない。以下では  $T, v_B$  をフリーパラメータとして、それが満たすべき条件を求めることになる。

前述の性質は

$$x_{n-1}(t) = x_n(t + T) + v_B T \quad (2)$$

と表すことができる。ここで  $v_B$  は、先行車  $x_{n-1}$  がある挙動をした後、時間  $T$  後に  $x_n$  が距離  $v_B T$  下流側で同じ挙動をするという意味で、渋滞縞の後退速度である。このように全ての車両の挙動は単一の universal function  $F(t) \equiv x_n(t)$

を用いて

$$x_{n-k}(t) = F(t + kT) + kv_B T \quad (3)$$

のようにあらわされる<sup>1</sup>。このとき  $n$  番目の車の車間距離は

$$\Delta x_n(t) = F(t + T) - F(t) + v_B T \quad (4)$$

と書けるので、これらを追従方程式 (1) に代入することで、 $F(t)$  が従う差分微分方程式

$$\frac{1}{\alpha} \ddot{F}(t) + \dot{F}(t) = V(F(t + T) - F(t) + v_B T) \quad (5)$$

を得る (以下ではこれを「ロンド方程式」と呼ぶ)。このような差分微分方程式を一般に解くのは大変難しいが、OV 関数が 3 節で述べるような簡単な区分線形関数の場合は、比較的容易にこれを解くことができる。

## 2 漸近軌道 (Asymptotic Trajectory)

実際の数値計算は有限の長さを持ったサーキット上で行われているので、端点 C および F も有限のサイズを持った渋滞領域や自由領域に相当しているが、いま仮想的に半無限の自由 (渋滞) 領域から半無限の渋滞 (自由) 領域への遷移を考えると「limit cycle」の上半分 (下半分) に相当する減速 (加速) 過程が得られる。これを「減速側 (加速側) 漸近軌道」とよび、以下でこれを表す  $F(t)$  が満たすべき条件を求める。OV 関数上の点  $(\Delta x_C, v_C)$  と  $(\Delta x_F, v_F)$  に相当する一様流は追従方程式 (1) の線形安定な自明解なので [1]、漸近軌道はこれらの間を結ぶ「kink soliton」的なものであると考えられる [4]。

漸近軌道を表す  $F(t)$  は少なくとも 1 階微分まで連続な関数であり ( $C^1$  条件)、二つの異なった一様流を無限の時間をかけてつなぐ軌道である。従って  $F(t)$  から式 (4) によって計算された車間距離  $\Delta x_n(t)$  や速度  $v_n(t) \equiv \dot{F}(t)$  は無限の過去および未来である一定の値に漸近しなければならない (一様流条件)。

$$\Delta x_n(t) \rightarrow \Delta x_{\pm}, \quad v_n(t) \rightarrow v_{\pm} \quad (t \rightarrow \pm\infty) \quad (6)$$

これらの漸近値は、減速側漸近軌道の場合は  $(\Delta x_-, v_-) = (\Delta x_F, v_F)$ 、 $(\Delta x_+, v_+) = (\Delta x_C, v_C)$  となるべきものであり (加速側漸近軌道の場合は逆)、実際追従方程式 (1) より、

$$v_{\pm} = V(\Delta x_{\pm}) \quad (7)$$

を満たすことがわかる。従って漸近軌道の端点は常に OV 関数上にある。また式 (6) より  $x_n(t)$ 、 $x_{n-1}(t)$  は  $t \rightarrow \pm\infty$  で

$$x_n(t) \rightarrow v_{\pm} t, \quad x_{n-1}(t) \rightarrow v_{\pm} t + \Delta x_{\pm} \quad (8)$$

という漸近的挙動を持つ (位置座標の原点の任意性に相当する定数項を無視した) ことがわかるので、これらと式 (2) から、

$$(v_{\pm} + v_B) T = \Delta x_{\pm} \quad (9)$$

が成り立つ。これは無限の過去および未来における、渋滞線の静止系での単位時間あたりの交通量が、いずれも  $1/T$  に等しくバランスしていること、すなわち

$$\frac{v_- + v_B}{\Delta x_-} = \frac{v_+ + v_B}{\Delta x_+} = \frac{1}{T} \quad (10)$$

を意味する。またこの条件から  $\Delta x$ - $v$  図の上で  $(\Delta x_C, v_C)$  と  $(\Delta x_F, v_F)$  を結んだ直線の傾きが  $1/T$  になることもわかる。

それぞれの漸近軌道が全体で閉じて「limit cycle」を作るためには、同じ  $(\Delta x_C, v_C)$  と  $(\Delta x_F, v_F)$  をつなぐ加速側と減速側の漸近軌道が存在しなければならない (回帰条件)。OV 関数が関数上のある点  $S(\Delta x_S, V(\Delta x_S))$  に関して点対称であるとき (対称性の要請)、漸近軌道が一つ存在すれば、 $S$  に関して点対称の位置にあるもう一つの漸近軌道が存在することが簡単に証明できる。この場合には、回帰条件は  $(\Delta x_C, v_C)$  と  $(\Delta x_F, v_F)$  が  $S$  に関して点対称の位置

$$\Delta x_C + \Delta x_F = 2\Delta x_S \quad \text{または} \quad v_C + v_F = 2V(\Delta x_S) \quad (11)$$

<sup>1</sup>この処方は波動方程式を解くときに使われる進行波の仮定 ( $\phi(x, t) \rightarrow f(x - vt)$ ) の一種であると見なすこともできる。

に来ることゝ満たされる。この対称性の要請は漸近軌道を見いだすために必須の条件ではないが、簡単のため、以下で扱うモデルはこれを満たすものに限る。その場合二つの漸近軌道のうちいずれか一方を議論すれば十分であり、今後の計算は減速側漸近軌道を例にとり行う。

ここで漸近軌道（ないし「limit cycle」）を特徴付けるパラメータの間に成り立つ関係式 (7)、(9)、(11) を再掲すると

$$\begin{cases} v_C = V(\Delta x_C) \\ v_F = V(\Delta x_F) \end{cases} \quad \begin{cases} (v_C + v_B)T = \Delta x_C \\ (v_F + v_B)T = \Delta x_F \end{cases} \quad \Delta x_C + \Delta x_F = 2\Delta x_S \quad (12)$$

となる。これらの関係式を用いれば、OV 関数  $V(\Delta x)$  および挙動の遅れ  $T$  を与えることで他の全てのパラメータ  $\Delta x_C$ ,  $v_C$ ,  $\Delta x_F$ ,  $v_F$ ,  $v_B$  を決定することができる。従って (OV 関数が点対称性を持つならば) 実質的に漸近軌道（ないし「limit cycle」）を決定するパラメータは  $T$  のみである。ロンド方程式 (5) に従い、一様流条件 (6) を満たす 1 階連続微分可能な  $F(t)$  を求めることで  $T$  の  $a$  依存性が決定される。

### 3 区分線形な OV 関数をもつ OV モデル

・ Step 関数モデル

まず OV 関数として、Heviside 関数  $\theta(x)$  を用いた

$$V(\Delta x) = V_0 \theta(\Delta x - \Delta x_S) \quad (13)$$

を採用する。このモデルは文献 [5] で論じられたものと同じである。式 (12) より

$$\begin{cases} v_C = 0 \\ v_F = V_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta x_C = \Delta x_S - V_0 T/2 \\ \Delta x_F = \Delta x_S + V_0 T/2 \end{cases} \quad v_B = \Delta x_S/T - V_0/2 \quad (14)$$

を得る。 $t=0$  で車間距離が  $\Delta x_S$  になる減速側漸近軌道を考えると、その解は ( $F(0) = 0$  として)

$$F(t) = \begin{cases} V_0 t & (t \leq 0) \\ \frac{V_0}{a}(1 - e^{-at}) & (t \geq 0). \end{cases} \quad (15)$$

である。これが  $\Delta x_n(0) \equiv F(T) - F(0) + v_B T = \Delta x_S$  を満たすべきことから条件式

$$1 - e^{-aT} - \frac{aT}{2} = 0 \quad (16)$$

が出るので、これを解いてこのモデルの  $a$ - $T$  依存性

$$aT = 1.59362\dots \quad (17)$$

を得る。Step 関数モデルでは  $T$  は  $a$  に反比例する。

・ Slope 関数モデル

先の Step 関数モデルでは、各車両は車間距離が  $\Delta x_S$  より小さいか大きいかによって、静止しようとするか最大速度  $V_0$  で走ろうとするかどちらかで、追従方程式には実質的な  $\Delta x$  依存性がない。つまりそれぞれの車はほとんど相互作用せずに行っているようなものである。そこで図 2 のようにある区間で有限の傾き  $f$  をもつ OV 関数を採用し、これを Slope 関数モデルとよぶことにする。図 2 にあるように、車間距離  $\Delta x$  は、その中で OV 関数が線形になる 3 つの領域 I, II, III に分けられる。 $\Delta x_A$ ,  $\Delta x_B$  は各領域の境界である。漸近軌道の特徴付けるパラメータは Step 関数モデル同様、式 (14) で与えられる。

車間距離が  $t = -\tau$  で  $\Delta x_B$ 、 $t = 0$  で  $\Delta x_A$  になる減速側漸近軌道は、ロンド方程式

$$\frac{1}{a}\ddot{F}(t) + \dot{F}(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t) & \text{領域 I} \\ f(F(t+T) - F(t) + v_B T - \Delta x_A) & (-\tau \leq t \leq 0) & \text{領域 II} \\ V_0 & (t \leq -\tau) & \text{領域 III} \end{cases} \quad (18)$$

に従い、条件式  $F(T) - F(0) + v_B T = \Delta x_A$ 、 $F(-\tau + T) - F(-\tau) + v_B T = \Delta x_B$  を満たす。ここで  $\tau$  は、車間距離が領域 II にある時間を表し、漸近軌道の特徴付ける新しいパラメータである。領域 I および III では、一様流条件を満た

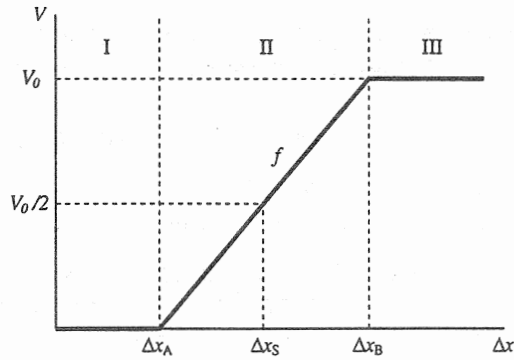


図 2: Slope 関数モデルの OV 関数。 $f$  は slope 部分の傾き、 $V_0$  は最大速度、 $\Delta x_S$  は最適速度が  $V_0/2$  になる車間距離。

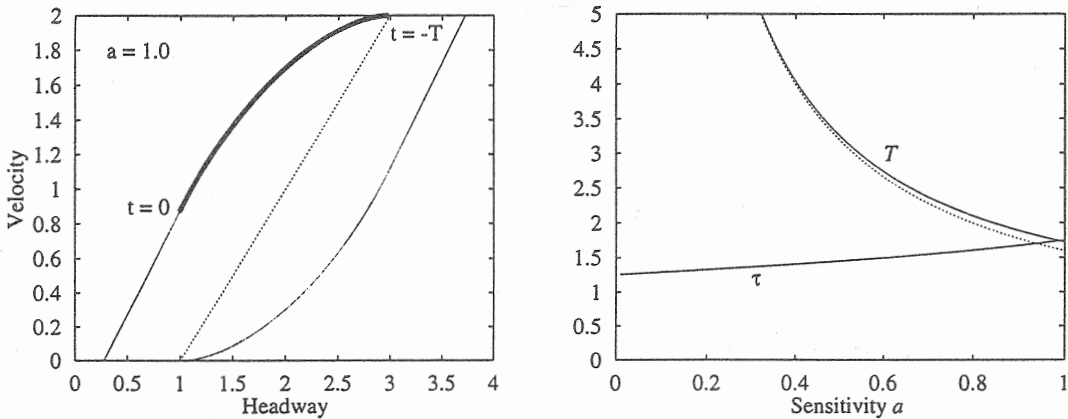


図 3:  $f = 1.0$ ,  $V_0 = 2.0$ ,  $\Delta x_S = 2.0$  の Slope 関数モデル。(左)  $a = 1.0$  でのシミュレーションの「limit cycle」(細線) および解析解の一部(太線)。(右)  $T \geq \tau$  の場合の  $T$  および  $\tau$  の  $a$  依存性。点線は Step 関数モデルの  $T$  の  $a$  依存性。 $a = 0.98857\dots$  のとき  $T = \tau = 1.74027\dots$  となる。

す式 (18) の解を容易に求めることができる。領域 II での解は、初めに右辺の  $F(t+T)$  として領域 I での解を用い、以後時間  $T$  づつ過去に遡ることで構成していくことができ (Step-by-Step 法)、これを  $t = -\tau$  で領域 III の解に接続して全体の減速側漸近軌道を得る。

このようにして求めた漸近軌道を図 3 (左) に示す。比べやすさのために解析解 (太線) については  $-T \leq t \leq 0$  の部分についてのみ描いているが、シミュレーションの結果 (細線) と非常によく一致している。また領域 II での解が最も簡単に求まる  $T \geq \tau$  の場合について、 $T$  および  $\tau$  の  $a$  依存性を図 3 (右) に示した。感度  $a$  が小さいときは、 $T$  の  $a$  依存性は Step 関数モデルのものとはほとんど変わらなくなる。

## 参考文献

- [1] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama, Phys. Rev. E51 (1995) 1035; Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics 11 (1994) 203.
- [2] M. Bando, K. Hasebe, K. Nakanishi, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama, J. Phys. I France 5 (1995) 1389.
- [3] K. Nakanishi, K. Itoh, Y. Igarashi, and M. Bando, KUNS-1411 HE(TH) 96/12, Niigata 96/E1, Aichi-5/96.
- [4] T. S. Komatsu and S. Sasa, Phys. Rev. E 52 (1995) 5574.
- [5] Y. Sugiyama and H. Yamada, DPNU-96-31, June 1996.