

主題： くりこみ群・無限自由度系を解析するための数的手法

内容： 1. くりこみ群と臨界現象

- ・ 統計力学模型と臨界現象
- ・ 平均場と臨界指数 (次元依存性)
- ・ ブロックスピン変換とくりこみ群
- ・ くりこみ群と臨界指数
- ・ くりこみ群の流れと固定点
- ・ 具体例：1次元 Ising 模型とガウス模型

2. くりこみ群と場の理論

3. Wilson の  $\epsilon$ -展開

4. Migdal 近似

5. くりこみ群と連続空間の場の理論

- ・ 有効結合定数
- ・ 格子正則化と非摂動的場の理論の構成

6. くりこみ群と複素力学系

- ・ Lee-Yang ゼロ点とくりこみ群の周期点
- ・ Li-York カオス

# 相転移(臨界現象) / 多体系の協同現象

## Phase Transition (Critical Phenomena) / Collective Effect of Many-body System

### 物理現象の例

- 固体  $\leftrightarrow$  液体  $\leftrightarrow$  気体 の相変化
- 自発磁化：強磁性体金属は極低温で磁石になる。
- 超伝導：極低温で電気伝導度がゼロになる。
- 中性子星の形成：ボーズ・アインシュタイン凝縮
- 膨張宇宙の進化：  
場の理論における真空の相転移による相互作用の進化

....

生物現象：反応、形態形成、進化、地球環境変化...

社会現象：パニック、群集心理、経済恐慌、...

にも適用可能？

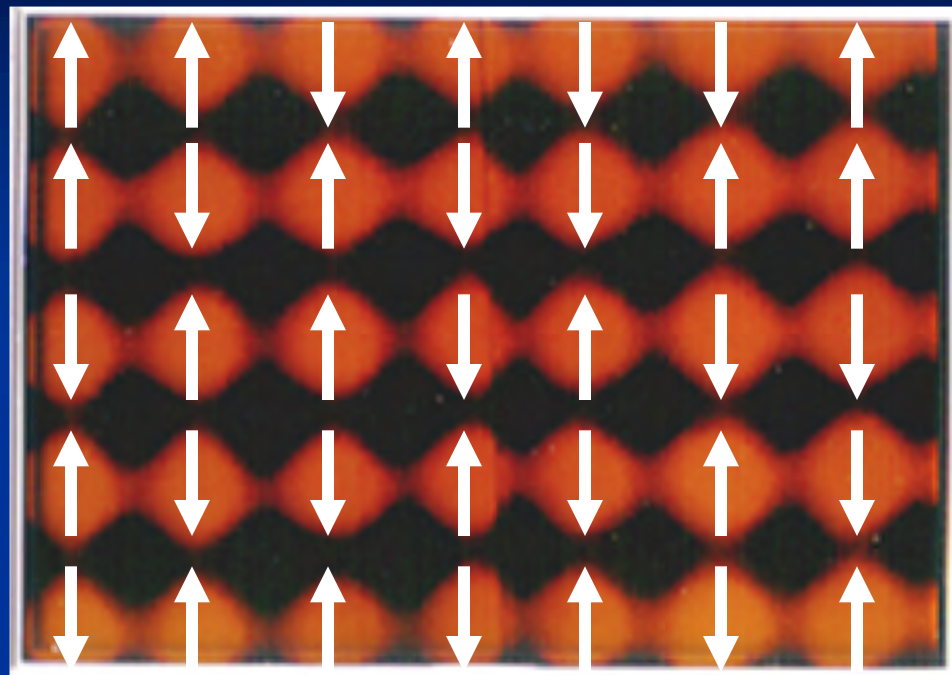
# 強磁性体の磁化現象：強磁性体金属は極低温で磁石になる。

金属：単原子分子の配列



スピンモデル (Spin Model)

Ising Model  $\left\{ \begin{array}{l} \text{上向き} \uparrow \\ \text{下向き} \downarrow \end{array} \right.$



■ 空間にスピンの配列し、隣同士のスピンとだけ相互作用する。

各スピンはそれぞれ上か下かに向く。⇒  $\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{スピンの向きがバラバラ} = \text{磁化しない。} \\ \cdot \text{スピンの向きが揃う} = \text{磁化する。 (磁石)} \end{array} \right.$

空間にスピンの配列し、隣のスピンとだけ相互作用する。

Ising Model

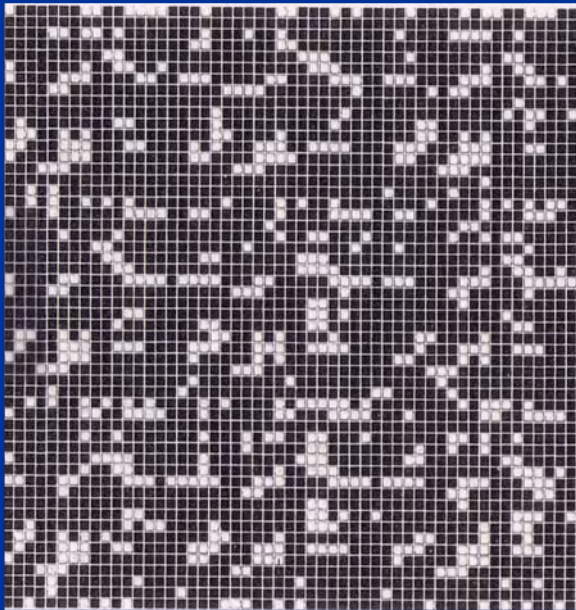
{ 上向き ↑ ■  
下向き ↓ ■

並んだ2つのスピンは揃う方がエネルギーが低い。

スピンの向きは温度によって揺らぐ。

巨視的様相はどうか？

$T < T_c$  (磁化)  
低温 : スピンの向きが揃う。



一様(周期的)

$T = T_c$   
相転移点(臨界温度)



様々なスケールが共存(非周期的)  
スケーリング則 : 自己相似的

$T > T_c$   
高温 : スピンの向きはバラバラ



ランダム



# Isingモデル(統計力学)

■ スピン変数 :  $\sigma = +1 (\uparrow), -1 (\downarrow)$

■ ハミルトニアン/エネルギー :  $E = -\sum_{\langle ij \rangle} J \sigma_i \sigma_j$  ,  $J > 0$  強磁性体

最近接相互作用  
(隣のスピンのみとだけ相互作用する。)

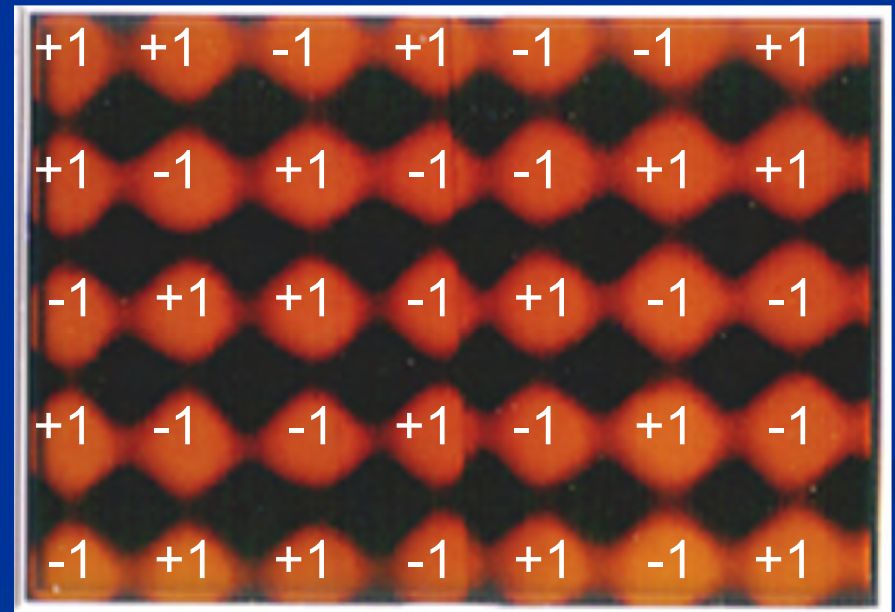
■ 温度  $T$  で, ある配位が出現する確率 :  $\propto \exp(-E/kT)$  (カノニカル分布)

磁化 :  $M = \sum \langle \sigma \rangle / N$  平均値

$$\langle \sigma \rangle = \frac{\sum \sigma \exp(-E/kT)}{\sum \exp(-E/kT)}$$

## ◆ モンテカルロ シミュレーション

温度  $T$  を与えて、カノニカル分布に従うたくさんの配位のセット(アンサンブル)を作り、 $\sigma$  の期待値を計算する。



1つの配位

# 目次

1	くりこみ群と臨界現象	3
1.1	統計力学模型と臨界現象 (準備)	3
1.1.1	古典統計力学模型	3
1.1.2	Partition Function (分配関数)	3
1.1.3	Free Energy (自由エネルギー)	3
1.1.4	Magnetization (磁化)	4
1.1.5	Correlation Function (相関関数)	5
1.1.6	critical exponent (臨界指数)	6
1.2	平均場 (Mean Field) の方法と臨界指数	6
1.2.1	平均場近似の Free Energy	6
1.2.2	臨界点付近の振る舞い (Even Ferro-Magnet の一般論)	7
1.2.3	臨界指数 (critical exponents)	7
1.2.4	臨界指数の次元依存性	8
1.3	ブロックスピン変換とくりこみ群	9
1.3.1	Block Spin 変換のアイデア	9
1.3.2	Block Spin 変換の定式化	9
1.3.3	臨界指数の計算	10
1.4	厳密解と厳密なくりこみ群	10
1.4.1	計算の準備	10
1.4.2	分配関数の厳密解 (周期境界条件)	11
1.4.3	相関関数の厳密解	11
1.4.4	くりこみ変換	12
1.5	くりこみ群の流れ図 (Renormalization Flow)	
1.6	$\phi^4$ - 理論	

# 1 くりこみ群と臨界現象

## 1.1 統計力学模型と臨界現象 (準備)

### 1.1.1 古典統計力学模型

- Hamiltonian

- $$H = -J \sum_{x,\mu} \sigma_x \sigma_{x+\hat{\mu}} + B \sum_x \sigma_x$$

- $x$  : サイト

- $\hat{\mu}$  :  $\mu$  方向の unit vector

- $x, \hat{\mu} = \langle x, y \rangle$  : a nearest-neighbor interaction

- Ferro Magnet :  $J > 0$

- Ising Model : spin 変数  $\sigma = \pm 1$

### 1.1.2 Partition Function (分配関数)

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp \{-H/kT\} \quad : \text{Canonical アンサンブルの状態和}$$

・  $k$  : Boltzman 定数

・  $T$  : 温度     $\{\sigma\}$  : すべての configuration についての足し上げ

$$Z[N, K, h] = \sum_{\{\sigma\}} \exp \left\{ K \sum_{x, \mu} \sigma_x \sigma_{x+\mu} + h \sum_x \sigma_x \right\} = \sum_{\{\sigma\}} \exp \{S[K, h]\}$$

・  $N$  : Sites (全サイト数)

$K = J/kT$  : Coupling (結合定数)

$h = -B/kT$  : External field (外場)

$S[K, h]$  : Action

### 1.1.3 Free Energy (自由エネルギー)

$$\mathcal{F} = \ln Z = NF$$

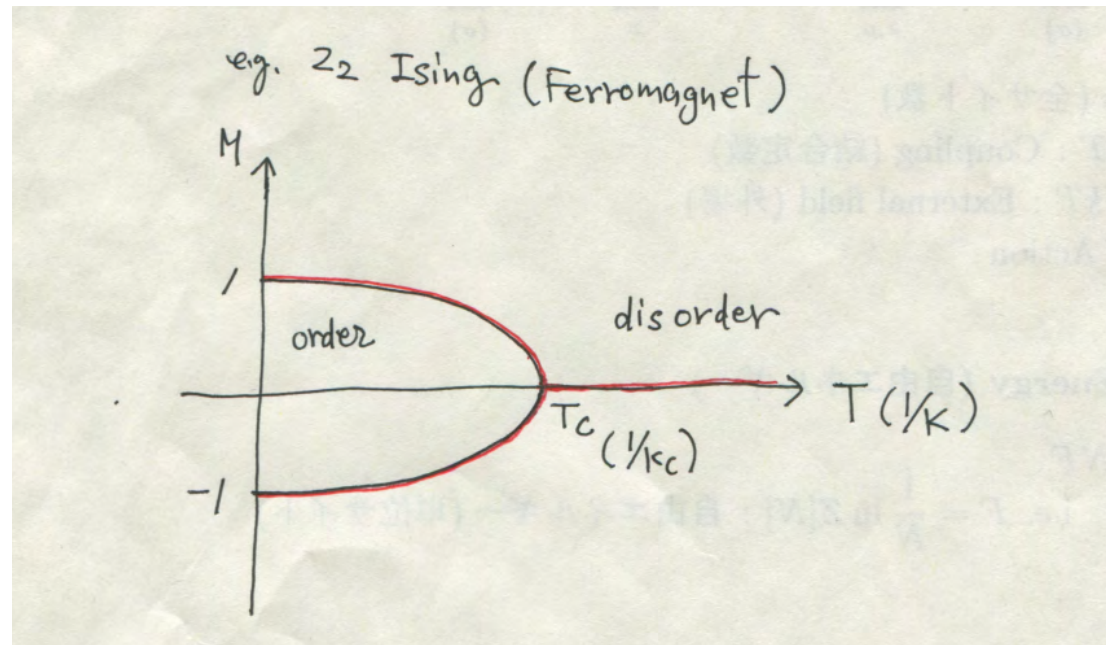
i.e.  $F = \frac{1}{N} \ln Z[N]$  : 自由エネルギー (単位サイト)



### 1.1.4 Magnetization (磁化)

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{N} \sum_x \frac{\sum_{\{\sigma\}} \sigma_x \exp \{S[K, h]\}}{\sum_{\{\sigma\}} \exp \{S[K, h]\}} \Big|_{h=0} \\ &= \frac{1}{N} \sum_x \sum_{\{\sigma\}} \sigma_x \frac{\exp \{S\}}{Z} \Big|_{h=0} \\ &= \frac{1}{N} \sum_x \langle \sigma_x \rangle \Big|_{h=0} : \text{Boltzman weight のアンサンブル平均} \\ &= \frac{\partial F}{\partial h} \Big|_{h=0} \end{aligned}$$

- Order parameter (秩序変数) としての自発磁化  $M$   
 Ferromagnet (e.g. Ising Model  $Z_2$  対称性,  $d \geq 2$ )  
 2次相転移 (次元が高い方が揺らぎが押さえられスピンの揃い易い。)
- $T > T_c$  :  $M = 0$  (disorder phase: 無秩序相) スピンの向きがバラバラ.  $\leftrightarrow$  対称性あり
- $T < T_c$  :  $M \neq 0$  (order phase: 秩序相) スピンの向きが揃う.  $\leftrightarrow$  自発磁化の発生  
 $\Rightarrow$  外場 ( $h \rightarrow 0$ ) でも  $M \neq 0$  で対称性が破れる。  
 自発的対称性の破れ (Spontaneous Symmetry Breaking)
- $T = T_c$  : Critical Point (臨界温度, 相転移点)



### 1.1.5 Correlation Function (相関関数)

$$\begin{aligned}\Gamma_x &= \langle \sigma_x \sigma_0 \rangle \\ &= \sum_{\{\sigma\}} \sigma_x \sigma_0 \frac{\exp \{S[T, h = 0]\}}{Z} \quad : \text{2つのスピン間の相関を測る。}\end{aligned}$$

● 相関関数の振る舞い

・  $T > T_c$  (disorder phase) :  $\Gamma_x \sim \exp\{-|x|/\xi(T)\}$ , : 指数関数的 (exponential)

$\xi(T)$  : Correlation length (相関距離),

$\xi$  程度の長さの範囲内のスピン場が相関している。

場の理論では、(質量:mass) $^{-1}$

・  $T < T_c$  (order phase) :  $\Gamma_x \sim \exp\{-|x|/\xi(T)\} + M^2$ , : 指数関数的

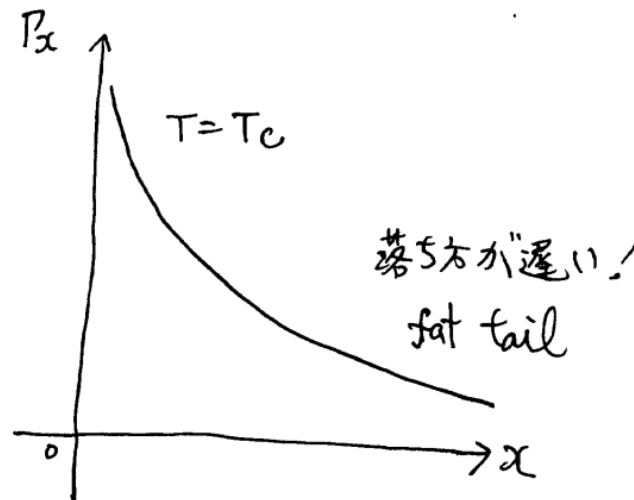
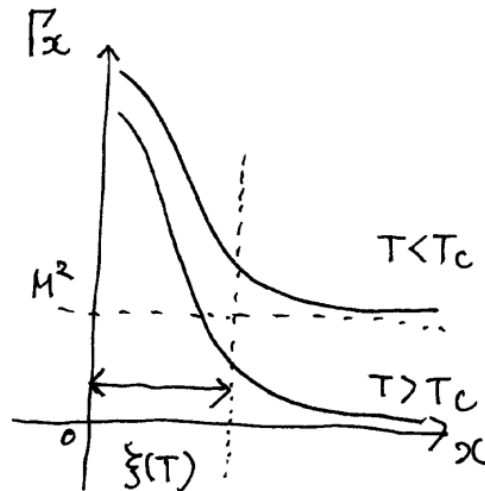
then,  $\langle \sigma_x \sigma_0 \rangle - \langle \sigma_x \rangle \langle \sigma_0 \rangle \sim \exp\{-|x|/\xi(T)\}$ ,

(truncated 相関関数)

・  $T = T_c$  (critical point) :  $\Gamma_x \sim 1/|x|^{d-2+\eta}$ , : べき乗的 (power law)

$\eta$  : Critical Exponent (臨界指数)

相関距離無限大 ( $\xi \rightarrow \infty$ )  $\leftrightarrow$  massless 粒子



### 1.1.6 critical exponent (臨界指数)

種々の臨界指数の値  $\Leftrightarrow$  Unibersality Class

- Magnetization

$$M(T) \sim (T_c - T)^\beta$$

- Correlation length :  $T \rightarrow T_c, \xi \rightarrow \infty$

$$\xi(T) \sim \begin{cases} (T - T_c)^{-\nu}, & T > T_c \\ (T_c - T)^{-\nu'}, & T < T_c \end{cases} \quad \text{実際 } \nu = \nu'$$

- Correlation function at  $T_c$

$$\Gamma_x \sim 1/|x|^{d-2+\eta}$$

- Magnetic susceptibility (磁化率)

$$\chi = \left. \frac{\partial F}{\partial h} \right|_{h=0} \sim \begin{cases} (T - T_c)^{-\gamma}, & T > T_c \\ (T_c - T)^{-\gamma'}, & T < T_c \end{cases} \quad \text{実際 } \gamma = \gamma'$$

- Specific heat (比熱)

$$C_v = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \sim \begin{cases} (T - T_c)^{-\alpha}, & T > T_c \\ (T_c - T)^{-\alpha'}, & T < T_c \end{cases} \quad \text{実際 } \alpha = \alpha'$$

## 1.2 平均場 (Mean Field) の方法と臨界指数

### 1.2.1 平均場近似の Free Energy

· e.g.) Ising Model

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp \left\{ K \sum_{x,\mu} \sigma_x \sigma_{x+\hat{\mu}} \right\}$$

MF 近似 :  $\langle \sigma_x \rangle = M$ , magnetization を背景場として

$$\begin{aligned} \Rightarrow Z_{MF} &= \sum_{\{\sigma\}} \exp \left\{ K \sum_{x,\mu} \sigma_x M \right\} \\ &= \sum_{\{\sigma\}} \exp \left\{ 2dKM \sum_x \sigma_x \right\} \\ &= \prod_x \sum_{\sigma_x = \pm 1} \exp \{ 2dKM \sigma_x \} \\ &= \prod_x \{ \exp(2dKM) + \exp(-2dKM) \} \\ &= \{ 2 \cosh(2dKM) \}^N \end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned} F_{MF} &= \frac{1}{N} \ln Z_{MF} = \ln 2 \cosh(2dKM) \\ &= F_{MF}(M^2, T) ; \text{Even Ferro-Magnet 一般} \end{aligned}$$



# 相転移発生の基本的理解 (平均場の方法を例にして)

## 1.2.2 臨界点付近の振る舞い (Even Ferro-Magnet の一般論)

- $T \sim T_c$ ,  $M \sim 0$ ,  $\rightarrow$  small  $M$  で展開

$$F_{MF}(M^2, T) = F_c(T) + a(T)M^2 + b(T)M^4 + \dots$$

$b(T) > 0$  for Stability condition of a System

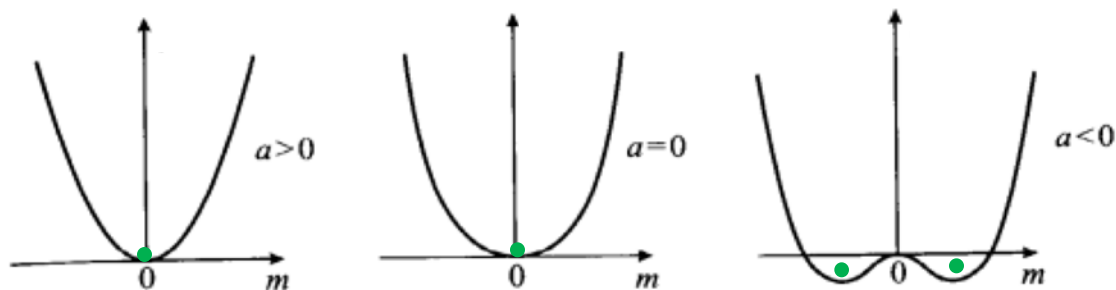
- local minimum of  $F_{MF}$  : **基底状態 (ground state) が変化する。**

$$\frac{\partial F_{MF}}{\partial M} = 0 \quad 2a(T)M + 4b(T)M^3 = 0, \quad M = 0, \pm \sqrt{\frac{-a(T)}{2b(T)}}$$

- $a(T) > 0$  :  $M = 0$  のみ. stable. ( $T > T_c$ )

- $a(T) < 0$  :  $M = 0$ , unstable ;  $M = \pm \sqrt{\frac{-a(T)}{2b(T)}}$ , stable. ( $T < T_c$ )

- $a(T_c) = 0$  : Critical



## 臨界指数 (Critical Exponents) の計算

### ・臨界点付近で

・ near critical :  $t = T - T_c$  として

$$a(T) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots, \quad \text{where } a_0 = 0 \text{ for } a(T_c) = 0.$$

$$a_1 > 0 \text{ for } a(T) > 0 \leftrightarrow T > T_c.$$

$$b(T) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots, \quad \text{where } b_0 > 0 \text{ for stability.}$$

### 1.2.3 臨界指数 (critical exponents)

#### ・自発磁化 (magnetization)

$$M = \sqrt{\frac{-a(T)}{2b(T)}} \sim \sqrt{\frac{-a_1 t}{2b_0}} \sim (T_c - T)^{\frac{1}{2}},$$

$$\beta = \frac{1}{2}$$

#### ・磁化率 (magnetic susceptibility)

$$\chi = \left. \frac{\partial M}{\partial h} \right|_{h=0} = \frac{1}{2a(T)} \sim \frac{1}{2a_1 t} \sim (T - T_c)^{-1}, \quad \gamma = 1$$

$$\left( h = \frac{\partial F_{MF}}{\partial M} = 2a(T)M + 4b(T)M^3 \quad (= 0 \leftrightarrow h = 0) \text{ より } M = \frac{h}{2a(T)} \right)$$

# 復習: スピン多体の期待値

## 1.1.4 Magnetization (磁化)

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{N} \sum_x \frac{\sum_{\{\sigma\}} \sigma_x \exp \{S[K, h]\}}{\sum_{\{\sigma\}} \exp \{S[K, h]\}} \Big|_{h=0} \\ &= \frac{1}{N} \sum_x \sum_{\{\sigma\}} \sigma_x \frac{\exp \{S\}}{Z} \Big|_{h=0} \\ &:= \frac{1}{N} \sum_x \langle \sigma_x \rangle_{h=0} : \text{Boltzman weight のアンサンブル平均} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{または、} M &= \frac{1}{N} \sum_x \sum_{\{\sigma\}} \sigma_x \frac{\exp \{S\}}{Z} \Big|_{h=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial h} \ln \sum_{\{\sigma\}} \exp \left\{ K \sum_{x, \mu} \sigma_x \sigma_{x+\hat{\mu}} + h \sum_x \sigma_x \right\} \Big|_{h=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial h} \ln Z[K, h] \Big|_{h=0} \\ &= \frac{\partial F}{\partial h} \Big|_{h=0} \end{aligned}$$

## 1.1.5 Correlation Function (相関関数)

$$\begin{aligned} \Gamma_x &= \langle \sigma_x \sigma_0 \rangle \\ &= \sum_{\{\sigma\}} \sigma_x \sigma_0 \frac{\exp \{S[T, h=0]\}}{Z} : \text{2つのスピン間の相関を測る。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{または、} &= \frac{\partial}{\partial h_x} \frac{\partial}{\partial h_0} \ln \sum_{\{\sigma\}} \exp \left\{ K \sum_{x, \mu} \sigma_x \sigma_{x+\hat{\mu}} + \sum_x h_x \sigma_x \right\} \Big|_{h=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial h_x} \frac{\partial}{\partial h_0} F[K, h] \Big|_{h=0} \end{aligned}$$

・ 相関距離 (correlation length)

$$(\xi^{-1})^2 = \frac{\partial^2 F}{\partial M^2} \quad \text{の導出}$$

・  $M(x) \equiv \langle \sigma_x \rangle = \frac{\partial F}{\partial h(x)}$

and  $\frac{\partial M(x)}{\partial h(y)} = \frac{\partial^2 F}{\partial h(x)\partial h(y)} = \langle \sigma_x \sigma_y \rangle - \langle \sigma_x \rangle \langle \sigma_y \rangle$   
(correlation function)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial h(x)\partial M(y)} = \frac{\partial M(x)}{\partial M(y)} = \delta(x-y) \quad \text{i.e.} \quad h(x) = \frac{\partial F}{\partial M(x)}$$

・ then  $\frac{\partial h(x)}{\partial M(y)} = \frac{\partial^2 F}{\partial M(x)\partial M(y)}$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial M(x)\partial M(y)} \right|_{h=0} &= \left. \frac{\partial^2 F}{\partial h(x)\partial h(y)} \right|_{h=0}^{-1} \\ &= \Gamma(x,y)^{-1} \\ &\sim \exp\left(-\frac{|x-y|}{\xi}\right)^{-1} \\ &\sim \left( \int dq^d e^{iq(x-y)} \frac{1}{q^2 + (\xi^{-1})^2} \right)^{-1} \end{aligned}$$

$MF; q \rightarrow 0$

$$\frac{\partial^2 F_{MF}}{\partial M^2} = (\xi^{-1})^2$$

Fourier変換により運動量空間表示に

・ 相関距離 (correlation length)

$$(\xi^{-1})^2 = \frac{\partial^2 F}{\partial M^2}$$

$$(\xi^{-1})^2 = 2a(T) + 12b(T)M^2$$

i)  $t = T - T_c > 0, M = 0$

$$(\xi^{-1})^2 \sim 2(a_1 t + a_2 t^2) \sim 2a_1 t$$

$$\text{よって } \xi \sim \left( \frac{1}{2a_1 t} \right)^{1/2} \sim (T - T_c)^{-1/2} \quad \boxed{\nu = \frac{1}{2}}$$

ii)  $t = T - T_c < 0, M \sim (-t)^{1/2}$

$$(\xi^{-1})^2 \sim 2a_1 t + 12(b_0 + b_1 t)(-t) \sim (2a_1 - 12b_0)t$$

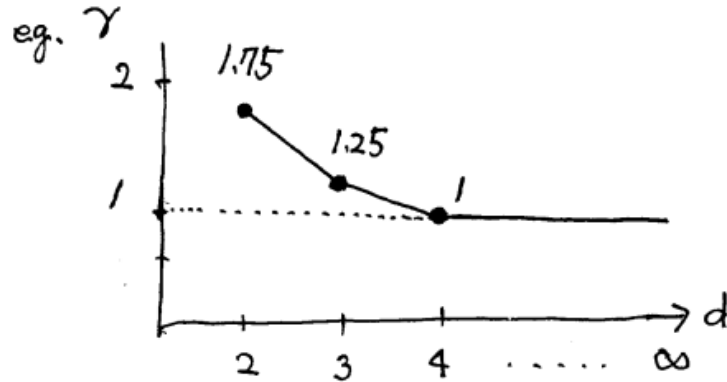
$$\text{よって } \xi \sim \left( \frac{1}{(-2a_1 + 12b_0)(-t)} \right)^{1/2} \sim (T_c - T)^{-1/2} \quad \boxed{\nu' = \frac{1}{2}}$$

iii)  $t = 0, T = T_c, M = 0$

$$(\xi^{-1})^2 = 0 \quad \text{よって } \boxed{\xi \sim \infty}$$

### 1.2.4 臨界指数の次元依存性

臨界指数	実験	MF	3-d Ising (展開)	2-d Ising (exact)
$\beta$	0.3 ~ 0.38	1/2	0.31	1/8 = 0.125
$\gamma$	1.2 ~ 1.4	1	1.25	7/4=1.75
$\nu$	0.6 ~ 0.7	1/2	0.64	1
$\eta$	0 ~ 0.1	0	0.056	1/4=0.25
$\alpha$	0 ~ 0.1	0	0.12	0



Mean Field  $\Leftrightarrow$  'd  $\rightarrow$   $\infty$ ' theory



# 1.3 ブロックスピン変換とくりこみ群

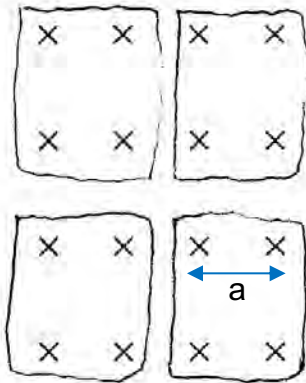
## 1.3.1 Block Spin 変換のアイデア

### Renormalization Group

Small fluctuation is integrated out step by step, **小さい揺らぎを段階的にくりこんで、**  
and the degree of freedom of dynamical variables are reduced. **力学変数の自由度を減らしていく。**

1) Block Spin transformation

ブロックスピン変換



$$Z_N(K; a)$$

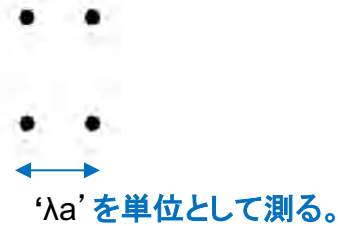
$\Rightarrow$



2) Scale transformation

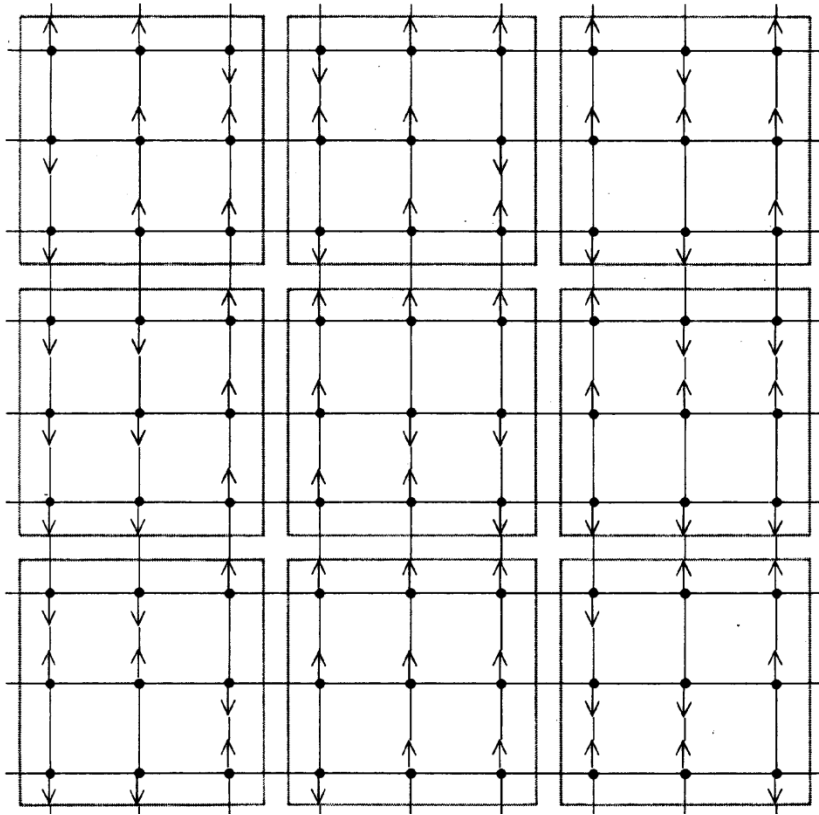
$(a \rightarrow \lambda a)$  スケール変換

$\Rightarrow$



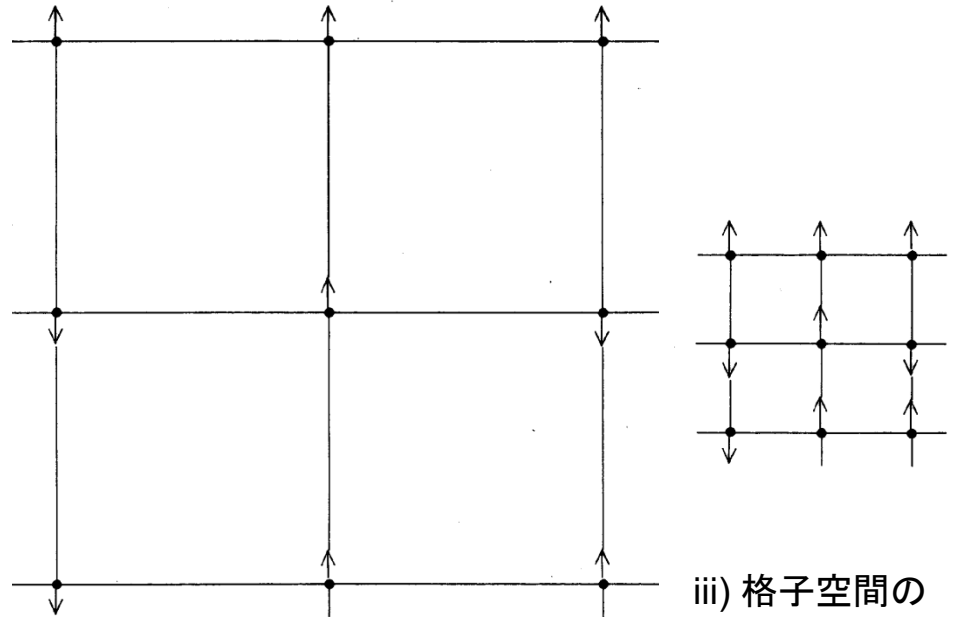
$$Z'_{N/\lambda}(K'; \lambda a)$$

## 1) Block Spin transformation



i) スピンを各ブロックに分ける。

## 2) Scale transformation ( $a \rightarrow \lambda a$ )

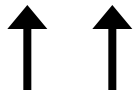


ii) 各ブロック内のスピンを平均操作して、ブロックスピンに置き換える。

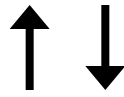
iii) 格子空間の大きさを縮小して、ブロックスピンの系を元のスピン系と同じ大きさの格子空間にする。

# スピンの結合定数とブロックスピンの有効結合定数の評価

スピンの配位によるエネルギー



$K$

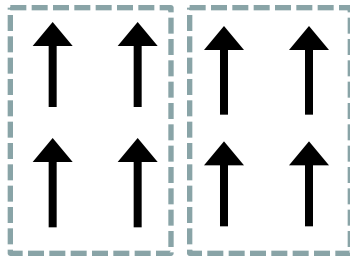


$-K$

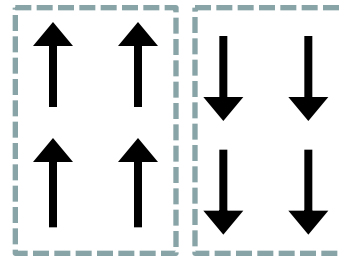
エネルギーの差

$2K$

ブロック内のスピンの配位によるエネルギー



$2 \times 4K + 2K$

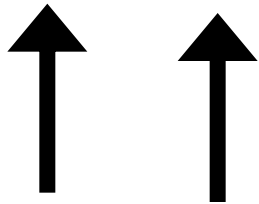


$2 \times 4K - 2K$

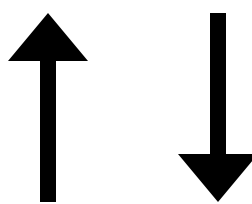
エネルギーの差

$4K$

ブロックスピンの配位によるエネルギーの差



$K'$



$-K'$

エネルギーの差

$2K'$

等しくなるべき !!

## 1.3.2 Block Spin 変換の定式化

e.g. desimation number :  $\lambda = 2$ , 空間の次元=2

・ 有効結合定数 (Effective Coupling)

$$H = K \sum_{x,\mu} \sigma_x \sigma_{x+\hat{\mu}}, \quad \sigma = \pm 1$$

2つの block 内のスピン全体のエネルギー差 :  $(2K + 2 \times 4K) - (-2K + 2 \times 4K) = 4K$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \parallel$$

$$H' = K' \sum_{x,\mu} \sigma'_x \sigma'_{x+\hat{\mu}}, \quad \text{2つの block-spin のエネルギー差: } K' - (-K') = 2K'$$

( $\sum_{\text{block}} \sigma = \pm 4 \rightarrow \sigma' = \pm 1$  に normalize.)

等しくなるべき!

よって、 $K' = 2K$ .

・ スケール変換による相関距離の変化

$$\xi(K') = \frac{1}{2} \xi(K)$$

・ Bloch Spin 変換 による くりこみ変換 : まとめ

$$K, \xi(K) \rightarrow \underline{K' = 2K}, \xi(K') = \frac{1}{2} \xi(K)$$

$\downarrow$

$\underline{K' = f(K)}$  : Kadanoff の仮定

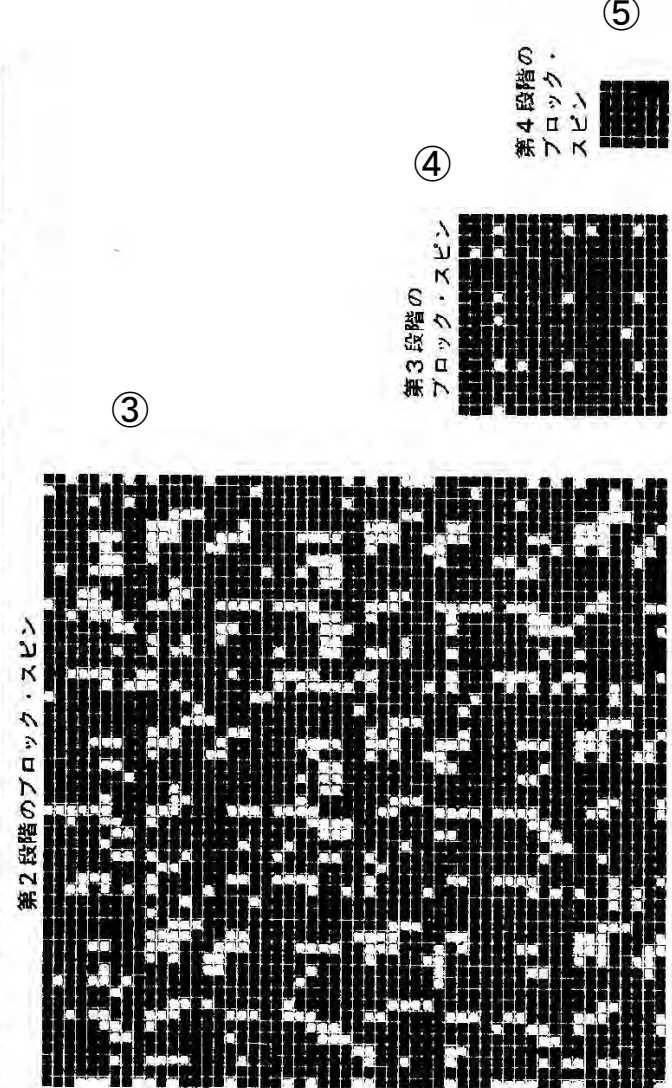
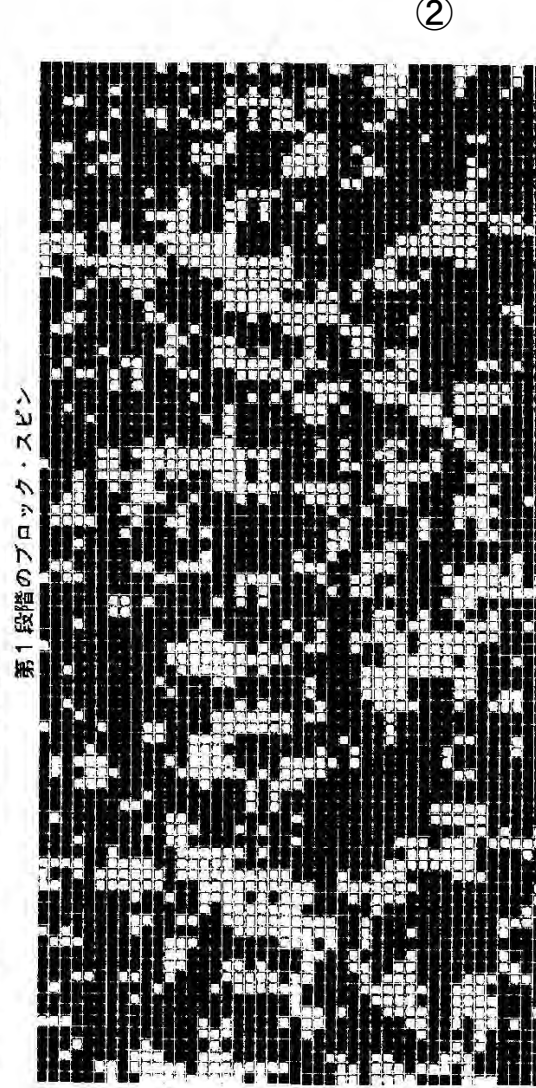
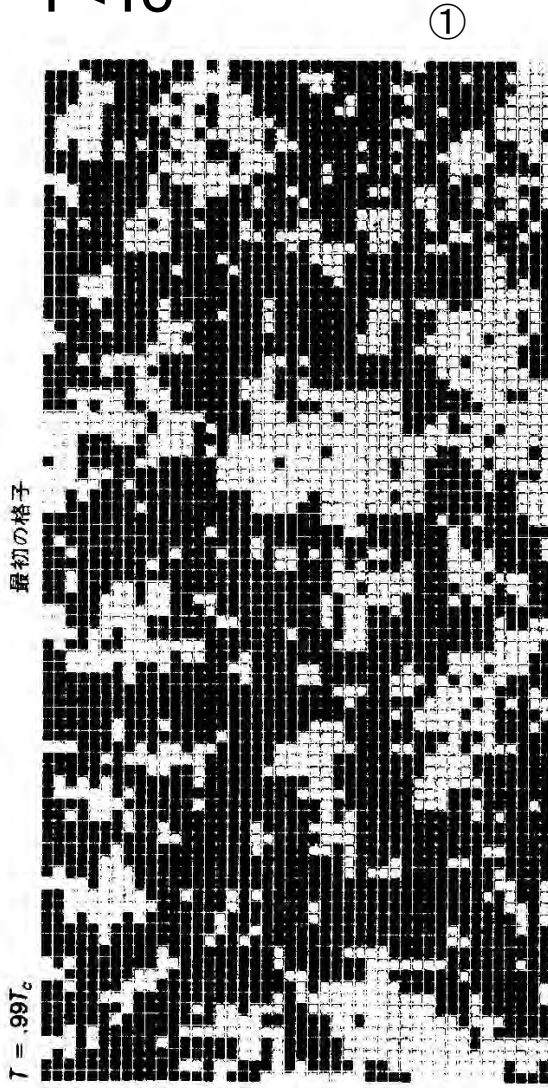
くりこみ群方程式

(Renormalization Group Eq.)

$\xi(f(K)) = \frac{1}{2} \xi(K)$  となる解析関数  $f(K)$  が存在.  $f(K_c)$  regular.

# くりこみ変換(ブロックスピン変換)の5ステップ

$T < T_c$



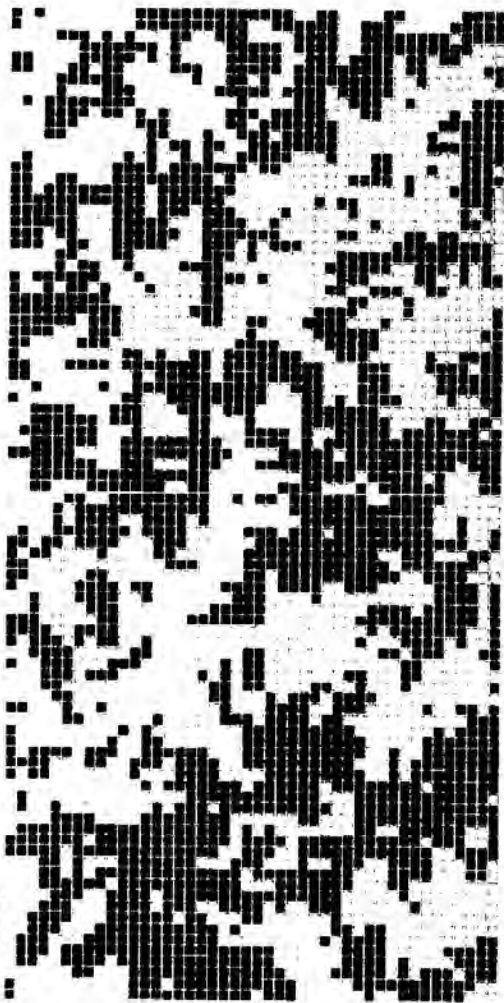
秩序相(自発磁化)にあることが分かる。



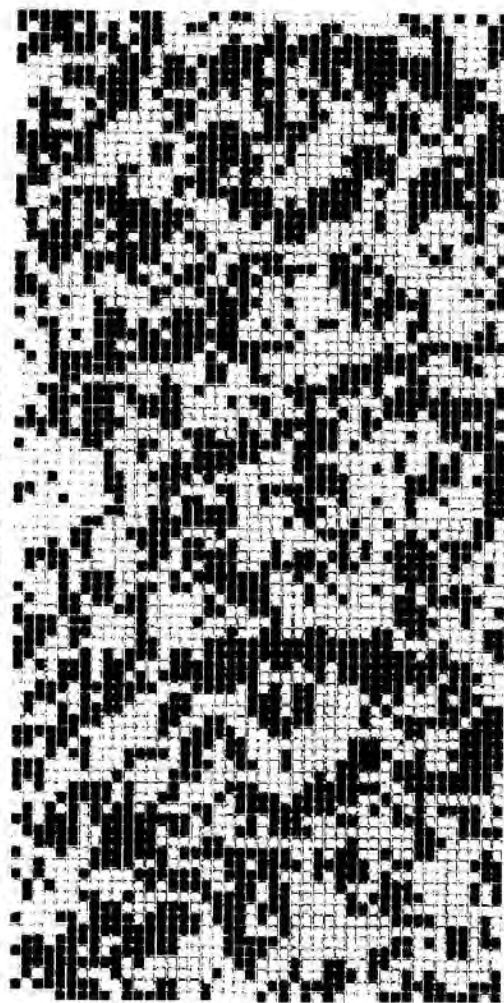
$T > T_c$

$T = 1.227_c$

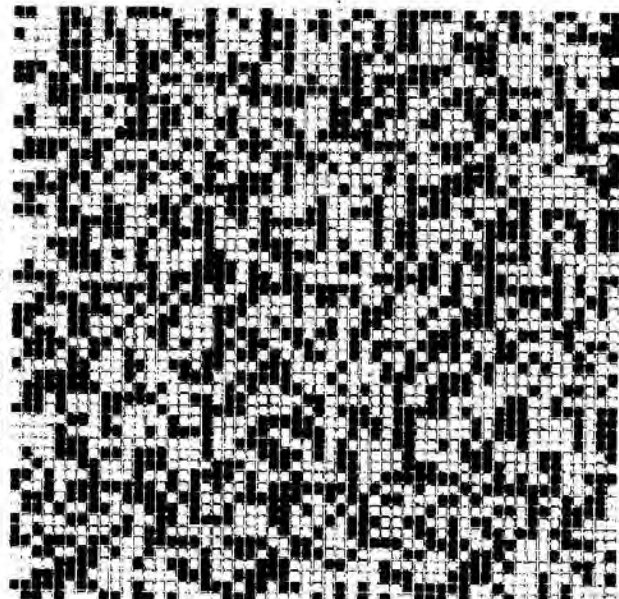
最初の格子



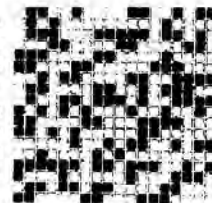
第1段階のブロック・スピンの



第2段階のブロック・スピンの



第3段階の  
ブロック・スピンの



第4段階の  
ブロック・  
スピンの

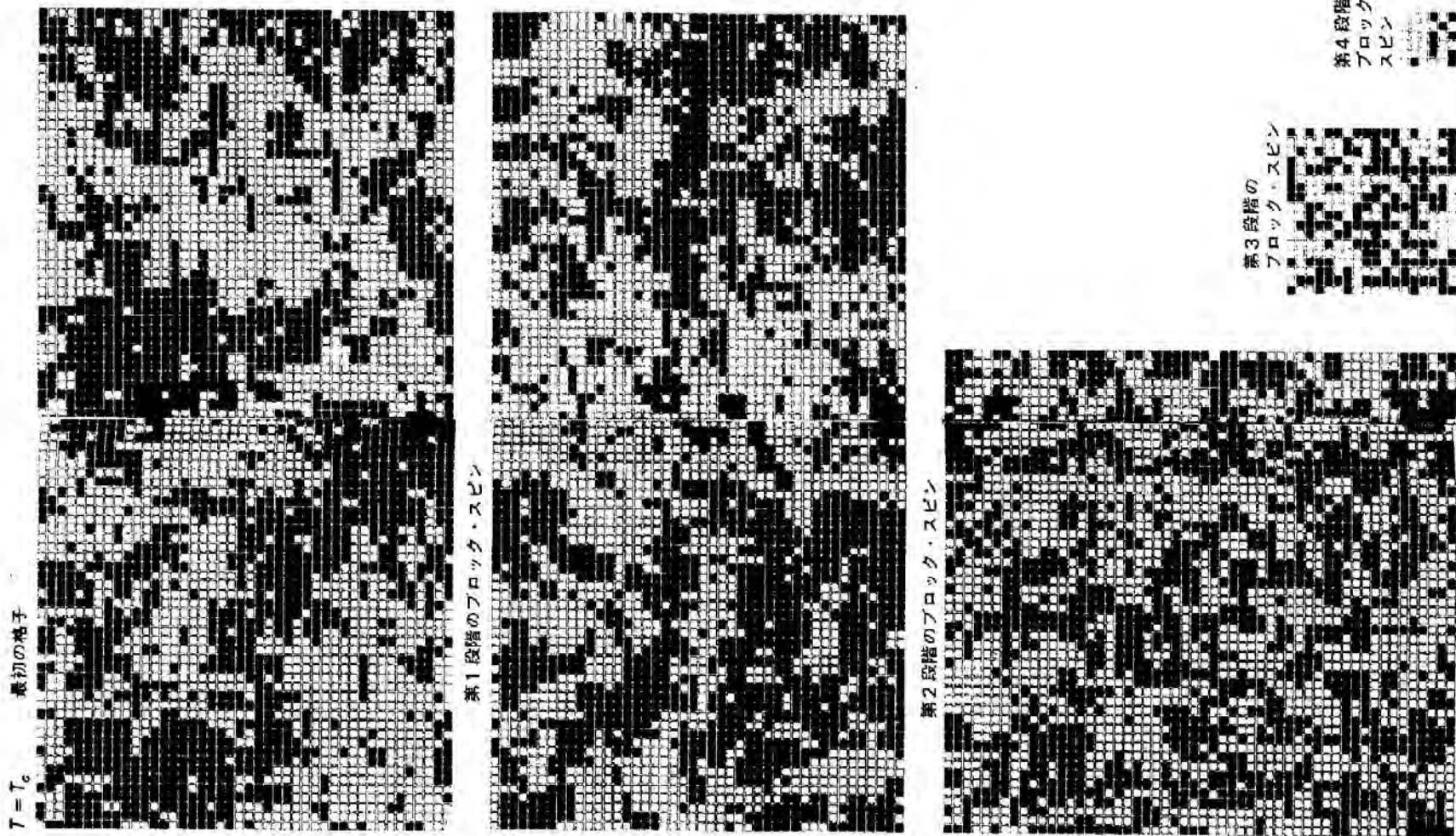


無秩序相(磁化していない)にあることが分かる。



$$T = T_c$$

くり込み変換によりスケールを換えても、同じ配位の様子に見える。



臨界点 ⇔ スケーリング則が成り立つ！

### 1.3.3 臨界指数の計算

- Critical  $K = K_c$  での振る舞い **臨界点**  $\leftrightarrow$  **スケーリング則が成り立つ!**

くり込み変換不変

臨界点:  $K_c = f(K_c)$  で  $K_c$  が与えられる. かつ、 $\xi(K_c) = \infty$ .

$K \sim K_c$  で  $f(K)$  は解析的とすると

$$f(K) = f(K_c) + \left. \frac{df(K)}{dK} \right|_{K=K_c} (K - K_c) + \dots$$

$$f(K) - f(K_c) \simeq \mu(K - K_c), \text{ where } \mu = \left. \frac{df(K)}{dK} \right|_{K=K_c} : \text{ 固有値}$$

臨界指数の計算

例) 相関距離の臨界指数

$K \sim K_c$  で、 $\xi(K) \sim (K - K_c)^{-\nu}$  と仮定すると、

$$\xi[f(K)] \sim [f(K) - f(K_c)]^{-\nu}$$

$$\text{よって、} \frac{\xi(f(K))}{\xi(K)} = \left\{ \frac{f(K) - f(K_c)}{K - K_c} \right\}^{-\nu} \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{2} = \mu^{-\nu}$$

$$\text{臨界指数: } \nu = \frac{\ln 2}{\ln \mu}, \text{ where } \mu = \left. \frac{df(K_c)}{dK} \right|_{K=K_c} \text{ で決まる.}$$

## 1.4 厳密解と厳密なくりこみ群

(1次元 Ising 模型 を例として)

$$Z_N(K) = \frac{1}{2^N} \sum_{\{\sigma\}} \exp \left\{ K \sum_{n=1}^N \sigma_n \sigma_{n+1} \right\}$$

### 1.4.1 計算の準備

$$\begin{aligned} \cdot \text{ i) } \exp K\sigma\sigma' &= 1 + K\sigma\sigma' + \frac{1}{2!}(K\sigma\sigma')^2 + \frac{1}{3!}(K\sigma\sigma')^3 + \dots \\ &= \left( 1 + \frac{1}{2!}K^2 + \frac{1}{4!}K^4 + \dots \right) + \sigma\sigma' \left( K + \frac{1}{3!}K^3 + \frac{1}{5!}K^5 + \dots \right) \\ &= \cosh K + \sigma\sigma' \sinh K \equiv c(K) + \sigma\sigma' s(K) \\ \cdot \text{ ii) } \frac{1}{2} \sum_{\{\sigma'\}} [a_1 + b_1\sigma\sigma'] [a_2 + b_2\sigma'\sigma''] &= a_1a_2 + b_1b_2\sigma\sigma'' , \quad (\text{by } \sum_{\{\sigma'\}} \cdot \sigma' = 0) \end{aligned}$$

### 1.4.2 分配関数の厳密解（周期境界条件）

$$\begin{aligned} \cdot Z_N(K) &= \frac{1}{2^N} \sum_{\{\sigma\}} \prod_{n=1}^N \exp(K\sigma_n\sigma_{n+1}) \\ &= \cdots \prod_{n=1}^N \{c(K) + \sigma_n\sigma_{n+1}s(K)\} \\ &= c(K)^N + s(K)^N \end{aligned}$$

• Free energy

$$\begin{aligned} F &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_N}{N}, \quad \ln Z_N = \ln\{c(K)^N + s(K)^N\} = \ln c(K)^N + \ln \left\{ 1 + \left( \frac{s(K)}{c(K)} \right)^N \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left\{ N \ln c(K) + \ln \left[ 1 + \left( \frac{s(K)}{c(K)} \right)^N \right] \right\} \\ &= \ln c(K) = \ln \cosh K \end{aligned}$$

### 1.4.3 相関関数の厳密解 の導出

$$\begin{aligned}
 \langle \sigma_m \sigma_n \rangle &= \frac{1}{2^N} \sum_{\{\sigma\}} \sigma_m \sigma_n \exp \left\{ K \sum_{k=1}^N \sigma_k \sigma_{k+1} \right\} / Z_N(K) \quad (m < n) \\
 &= \cdots \sum_{\{\sigma\}} \sigma_m \sigma_n \prod_{n=1}^N \{c(K) + s(K) \sigma_k \sigma_{k+1}\} / \cdots \\
 &= \underbrace{\sigma_m \times \{c(K)^{n-m} + s(K)^{n-m} \sigma_m \sigma_n\}}_{\parallel} \times \sigma_n \\
 &\quad \underbrace{\{c + s \sigma_{m-1} \sigma_m\} \{c(K)^{n-m} \sigma_m \sigma_n + s(K)^{n-m}\}}_{\parallel} \{c + s \sigma_n \sigma_{n+1}\} \\
 &\quad \underbrace{\{c s^{n-m} + s c^{n-m} \sigma_{m-1} \sigma_n\}}_{\parallel} \{c + s \sigma_n \sigma_{n+1}\} \\
 &\quad \underbrace{\{c^2 s^{n-m} + s^2 c^{n-m} \sigma_{m-1} \sigma_{n+1}\}}_{\parallel} \\
 &= \frac{c^{N-(n-m)} s^{n-m} + s^{N-(n-m)} c^{n-m}}{c^N + N} \\
 &= \frac{\left(\frac{s}{c}\right)^{n-m} + \left(\frac{s}{c}\right)^{N-(n-m)}}{1 + \left(\frac{s}{c}\right)^N}
 \end{aligned}$$

よって

$$\langle \sigma_m \sigma_n \rangle_{N \rightarrow \infty} = \left( \frac{s(K)}{c(K)} \right)^{n-m} = (\tanh K)^{n-m}$$



## 相関関数の厳密解

$$\begin{aligned} \cdot \langle \sigma_m \sigma_n \rangle &= t^{n-m}, & \text{where } t &= \tanh K, \quad (0 < t < 1 \leftrightarrow 0 < K < \infty) \\ &= \exp \ln t \times |n - m| \\ &: \Gamma_x \sim \exp \{-|x|/\xi(T)\}, \end{aligned}$$

$$\cdot \text{相関距離} : \xi = -\frac{1}{\ln t}$$

### ・ Critical な振る舞い (厳密解より)

$$\cdot \text{相関距離} : \xi = -\frac{1}{\ln t}$$

$$\cdot \text{臨界点} : \xi = \infty \text{ より } t_c = 1.$$

$$\cdot \text{臨界指数} : \ln t = \ln\{t_c - (t_c - t)\} = \ln\{1 - (t_c - t)\} \sim -(t_c - t) \text{ より}$$

$$\xi \sim \frac{1}{t_c - t} = (t_c - t)^{-1}$$

$$\nu = 1$$



### 1.4.4 くりこみ変換の導出 (厳密なくり込み変換)

- Decimation :  $\lambda$  個の bond  $\rightarrow$  1 個の bond', ( $\lambda$  : decimation number)
  - i) block spin 変換 :  $\sigma_n \rightarrow \sigma'_n = \sigma_{n\lambda}$ ; spin の数 :  $N \rightarrow N/\lambda$
  - ii) scale 変換 :  $a \rightarrow a' = \lambda a$

i) block spin 変換

$$\begin{aligned}
 Z_N(K) &= \frac{1}{2^N} \sum_{\{\sigma\}} \prod_{n=1}^N \{c(K) + s(K)\sigma_n\sigma_{n+1}\} \\
 &= \dots \prod_{n=1}^N \underbrace{\{c + s\sigma_n\sigma_{n+1}\}\{c + s\sigma_{n+1}\sigma_{n+2}\} \dots \{c + s\sigma_{n+\lambda-1}\sigma_{n+\lambda}\}}_{= \{c^\lambda + s^\lambda \sigma_n \sigma_{n+\lambda}\}} \dots \\
 &= \frac{1}{2^{N/\lambda}} \sum_{\{\sigma'\}} \prod_{n=\lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots} \{c^\lambda + s^\lambda \sigma_n \sigma_{n+\lambda}\}
 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
 Z_N(K) &= \frac{1}{2^N} c(K)^N \sum_{\{\sigma\}} \prod_{n=1}^N \left\{ 1 + \frac{s(K)}{c(K)} \sigma_n \sigma_{n+1} \right\} \dots (*) \\
 &= \frac{1}{2^{N/\lambda}} (c(K)^\lambda)^{N/\lambda} \sum_{\{\sigma_{n\lambda}\}} \prod_{n=1}^{N/\lambda} \left\{ 1 + \left( \frac{s(K)}{c(K)} \right)^\lambda \sigma_{n\lambda} \sigma_{(n+1)\lambda} \right\}
 \end{aligned}$$

ii) scale 変換

$$Z_N(K) = \frac{1}{2^{N/\lambda}} (c(K)^\lambda)^{N/\lambda} \sum_{\{\sigma'_n\}} \prod_{n=1}^{N/\lambda} \left\{ 1 + \left( \frac{s(K)}{c(K)} \right)^\lambda \sigma'_n \sigma'_{n+1} \right\}$$

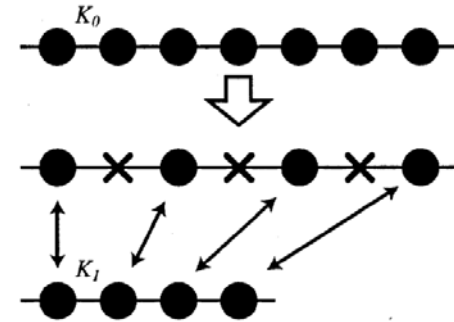
- the effective action [  $N/\lambda$  個 spin :  $\sigma'_n = \sigma_{n\lambda} = \pm 1$ , effective coupling :  $K_\lambda$  ] を the original action [  $N$  個 spin :  $\sigma_n = \pm 1$ , coupling :  $K$  ] (\*) と同型に書く。

$$\begin{aligned}
 Z_{N/\lambda}(K_\lambda) &= \frac{1}{2^{N/\lambda}} c(K_\lambda)^{N/\lambda} \sum_{\{\sigma_{n\lambda}\}} \prod_{n=1}^{N/\lambda} \left\{ 1 + \frac{s(K_\lambda)}{c(K_\lambda)} \sigma_{n\lambda} \sigma_{(n+1)\lambda} \right\} \\
 &= \frac{1}{2^{N/\lambda}} c(K_\lambda)^{N/\lambda} \sum_{\{\sigma'_n\}} \prod_{n=1}^{N/\lambda} \left\{ 1 + \frac{s(K_\lambda)}{c(K_\lambda)} \sigma'_n \sigma'_{n+1} \right\}
 \end{aligned}$$

the effective action とくりこみ変換した action を比較して、

$$\frac{s(K_\lambda)}{c(K_\lambda)} = \left( \frac{s(K)}{c(K)} \right)^\lambda \quad \text{i.e.} \quad \tanh K_\lambda = (\tanh K)^\lambda : \text{くりこみ群方程式}$$

$$\text{RG-eq. : } t_\lambda = R_\lambda(t) = t^\lambda, \text{ where } t = \tanh K$$



元のスピン系がくり込み変換されて、effectiveなスピン系に“見える”。

## ・ Critical な振る舞い

RG-eq. :  $t_\lambda = R_\lambda(t) = t^\lambda$ , where  $t = \tanh K$

・ 臨界点 :  $t_c = t_c^\lambda$  より  $t_c = 1$ .      <リ込み変換不変

・ 臨界指数 :  $\xi(t) \sim (t_c - t)^{-\nu}$  とすると、 $\xi(t_\lambda) = \lambda^{-1}\xi(t)$  より  $\left\{ \frac{t_c - t_\lambda}{t_c - t} \right\}^{-\nu} = \lambda^{-1}$

$$t_\lambda = R_\lambda(t) \text{ より } t_\lambda - t_c = \left. \frac{dR_\lambda(t)}{dt} \right|_{t=t_c} (t - t_c) = \mu(t - t_c)$$

$$\text{よって } \mu^{-\nu} = 1/\lambda \text{ i.e. } \nu = \frac{\ln \lambda}{\ln \mu}.$$

$$\text{今、 } \mu = \left. \frac{dR_\lambda(t)}{dt} \right|_{t=t_c} = \lambda t_c^{\lambda-1} = \lambda, \quad \text{よって、 } \nu = \frac{\ln \lambda}{\ln \lambda} = 1 \quad (\lambda\text{-independent!})$$

$$\nu = 1$$

厳密解に一致する !!

## 1.4.5 くりこみ変換とくりこみ群

・ 一般に、くりこみ変換は、

i) block spin 変換 :  $\sigma \rightarrow \sigma'$  ,

ii) scale 変換 :  $a \rightarrow a' = \lambda a$  , ( $\lambda$  : scale parameter)

で与えられ、

original action  $S(\sigma) \rightarrow$  effective action  $S'(\sigma') = R_\lambda[S(\sigma)]$  ,

条件:  $Z[S'] = Z[S]$ , i.e. 物理は同じ.

「くりこみ変換 = 分配関数を不変に保つスケール変換」

・ Coupling constant についてのくりこみ群方程式

$$K' = R_\lambda(K)$$

$$K' = R_{\lambda_2}(R_{\lambda_1}(K)) = R_{\lambda_1\lambda_2}(K)$$

i.e.  $R_{\lambda_2}R_{\lambda_1} = R_{\lambda_1\lambda_2}$  : (半)群をなす. e.g.  $(R_\lambda)^n = R_{\lambda^n}$

1.5

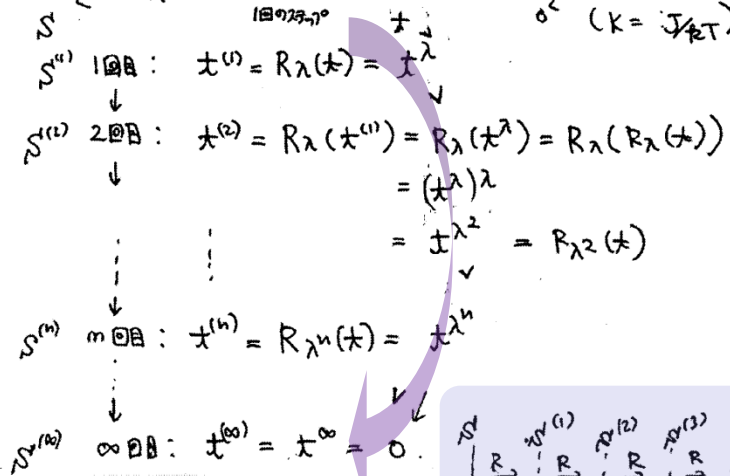
くりこみ群の流れ図 (Renormalization Flow)

RG-flow (eg. 1-d Ising).

RG-trans. (RG-ef.) :  $a \rightarrow \lambda a$  ( $\lambda > 1$ )  
 $t_\lambda = R_\lambda(t) = t^\lambda$  where  $t = \tanh K < 1$   
 ( $K = J/kT$ )

$t^* = R_\lambda(t^*) = (t^*)^2$

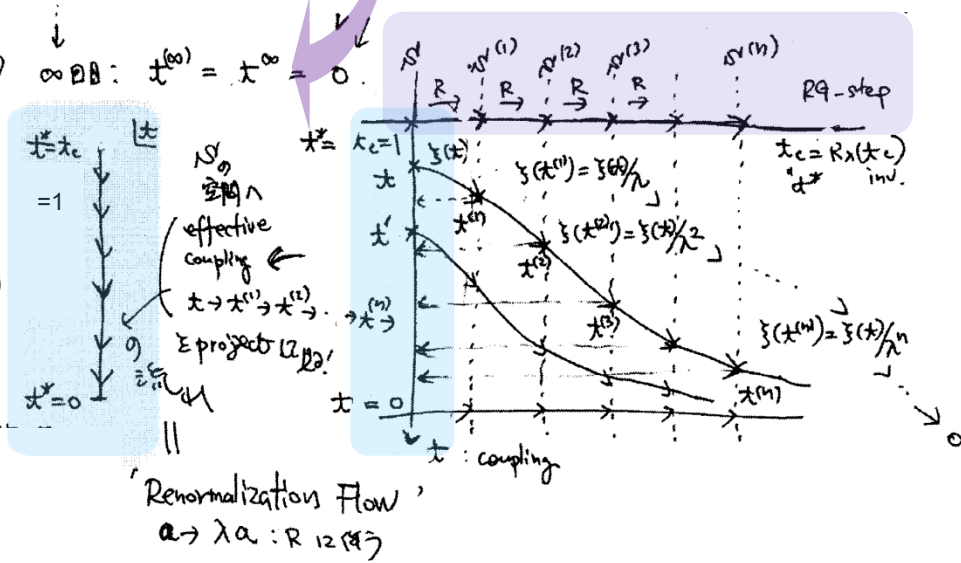
$t^* = 0, 1$   $t \in 1$   
 $t \mid 0 \leftrightarrow 1$   
 $K \mid 0 \leftrightarrow \infty$   
 $T \mid \infty \leftrightarrow 0$



固定点の一つが臨界点

紫外固定点 (UV Fixed point)

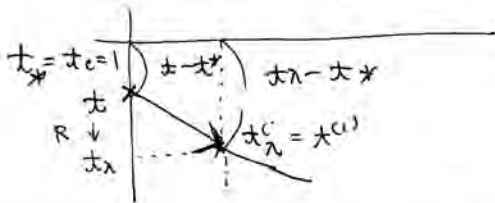
赤外固定点 (IR Fixed Point)



# 固定点 $t^*$ 付近のRG変換による振舞い

(critical point:  $t_c$ )

ie.  $(t_{\lambda} - t^*) \approx \mu (t - t^*) \in$  RG変換のFP付近での線形近似



今の場  
 $\mu (= \lambda) > 1$  の場合  
 decimation #

RG変換 #  $t \rightarrow t_{\lambda}$  は  $t^*$  から遠ざかる。

ie

$$(t^{(1)} - t^*) = \mu (t - t^*)$$

$$(t^{(2)} - t^*) = \mu (t^{(1)} - t^*) = \mu^2 (t - t^*)$$

$$(t^{(n)} - t^*) = \mu^n (t - t^*)$$

● **relevant Operator**

$\mu > 1$  より  $t^{(n)}$  は  $t^*$  より どんどん遠ざかる。  
 $t_c$  ( $t^* = t_c$  付近)

むしろ  $t^{(n)} \rightarrow t^* = 0 \wedge$

● **irrelevant Operator**

(すなわち  $\mu < 1$  の場合)  $t^{(n)}$  は  $t^*$  に近づいていく!



(UVFP.) RG変換に伴うこの流れの遠ざかる(遠ざかる)  $\Rightarrow$  UVFPが5

臨界指数  $\nu = \frac{\ln 2}{\ln \mu}$

$\sigma_n \sigma_{n+1} \sim \sigma^2$  の相対相の coupling  
 ● relevant Operator あり。

ε 55, critical 付近での振舞い 55 55 55!

# 磁場のある場合の1次元Ising模型のくりこみ群の流れ

## Hamiltonian または Action 空間の流れ

$$K \sum_{x,\mu} \sigma_x \sigma_{x+\hat{\mu}} + h \sum_x \sigma_x$$

UV固定点(臨界点) : 2relevant - FP

$t_c=1$

$t=0$

$(h=0)$

(ii)

$$t = \tanh K$$

$$(0 < t < 1 \leftrightarrow 0 < K < \infty)$$

$K = J/kT$  : Coupling (結合定数)

(i)

$(h=\infty)$

(iii)

1relevant + 1irrelevant - FP

0

1

$(T=0)$

$(T=\infty)$

