シミュレーション科学入門
（計算科学入門）
Computational Science

１．導入（Introduction）

　シミュレーションとは何か？

「現実世界の森羅万象を情報として造ること」

２．シミュレーション科学とは？

3. シミュレーション科学により発見された概念

シミュレーションとは何か？（その理解のために）

- ハードとソフト　：　物質的実体 と システム（情報）的存在
- 情報一元論　：世界は情報で造られている。
- デジタル一元論　：情報はすべてデジタル（言語・記号）で表せる。
- 情報処理＝計算　：デジタル処理はすべて数学的計算により可能。

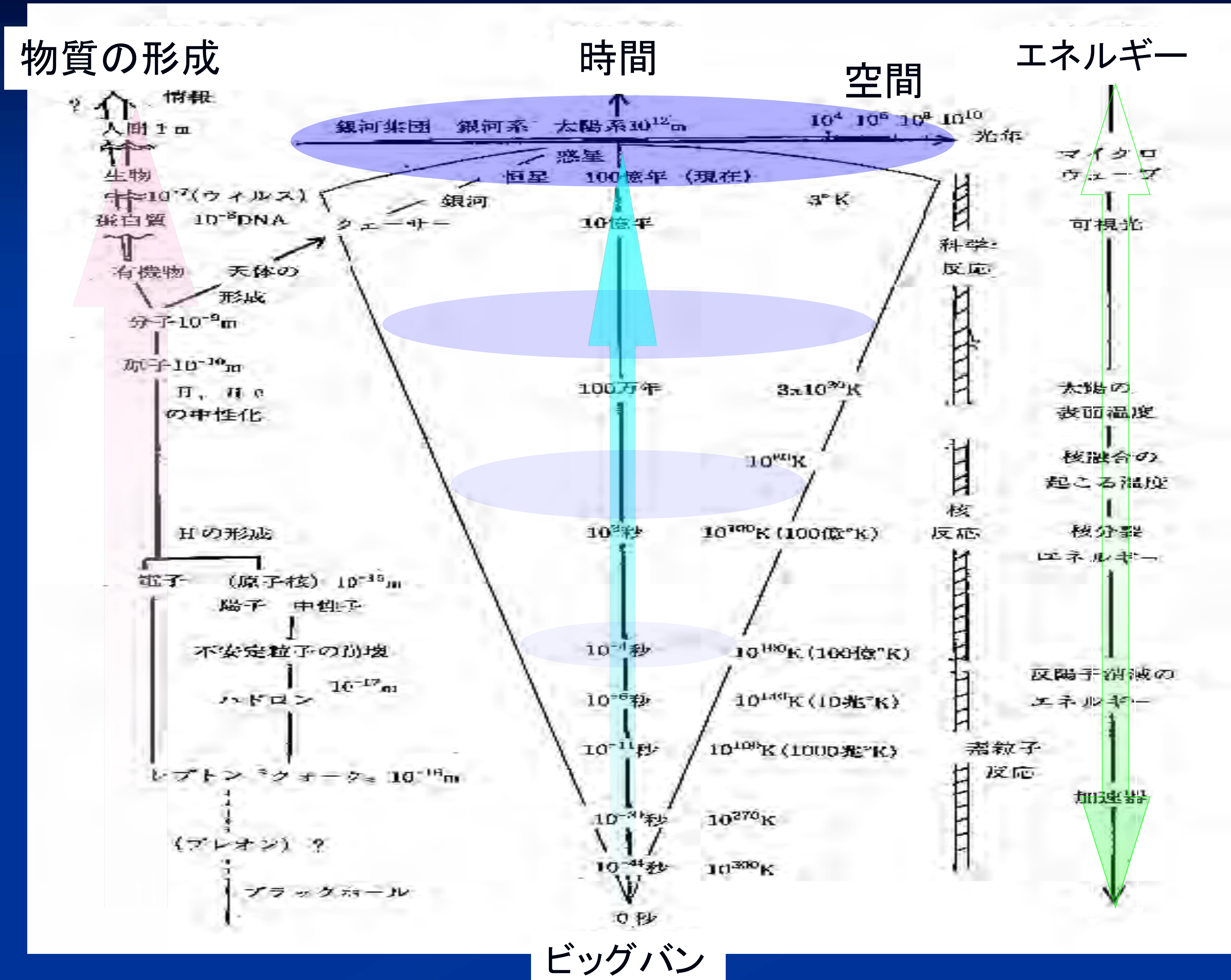
「世界は計算機によって造られる。」 ⟷ “シミュレーション”という。

創造された抽象世界 ⟶ 物質的実体を材料として具現化した世界

‖　‖

シミュレートされた世界 ⟵ 我々の宇宙/森羅万象

現在（地球時で）までの我々の宇宙の歴史（進化）



■ ハード（hard）とソフト（soft）：
“存在するもの”の2つの側面

	ハード：物体、物質的素材（形而下的存在）	ソフト：働き、関係性、システム（形而上的存在）
物質	素粒子・原子・分子・物体・星	物質科学の力学法則
生物	タンパク質	生命
生物種	生物	進化
地球	生物・物質	環境・生態系
人間	細胞	自意識
社会	人間	組織・ネットワーク
言語	文字	意味
コンピュータ	電子機械	プログラム
脳	脳神経細胞	思考・記憶・認識

■ ソフトはハードが無いと存在しない。しかし、ハードそのものではない。

■ 情報一元論： -世界のすべては情報である。-

‖

“システム”（System）：系

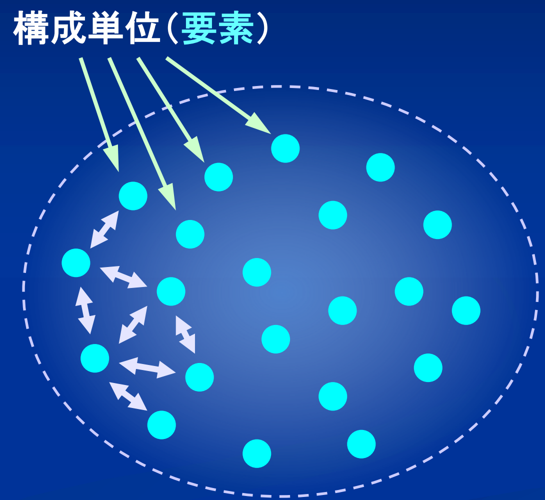
科学（世界を理解する方法）の基本原理

■ 原子論（atomism）
■ 機械論（mechanism）

} 要素還元主義

↓

物質的実体（を考えた）



多体系：構成単位の集合から“もの”は成り立つ。

■ 物質的単位が基本（ハードが重要）

組成物体は何か？（大きい物体→小さい物体 へと探求）　：マクロ → ミクロへ

e.g. 物質 → 分子 → 原子 → 素粒子
生物 → 細胞 → タンパク質 → DNA

■ 機能的単位が基本（ソフトが重要）

基本機能の集合から“もの”の振舞いは如何に発現するか？：ミクロ → マクロへ

◎ハード的組成の違いより、ソフト的同等性に注目。→ “システム”という考え方
（しくみ・働き／法則・ルール）＝ 情報

◎すべての“もの”をソフト的存在とみなす。⟶「ソフト的要素還元主義的世界観」

■ 情報的世界観 ⇔ デジタル一元論

例1） 物質的実世界：

- 大きさ/形（体積）: 物体 → 分子 → 原子 → 原子核 → 素粒子 ⇔ “点粒子”

  10^{-8} 10^{-10} 10^{-15} 10^{-18} (m) 大きさを持たない！

  （∵ 相対性理論）

  ⇒ 点の集団の構造（正味の体積=0）

  ⇒ 空間的位置座標の集合 → 数値
- 色 ⇒ 光 ⇒ 電磁波の波長（4000〜8000Å） → 数値
- 電磁気力（原子/分子を構成する相互作用）⇒ 電荷（属性） → 数値

  ゲージ場（素粒子）⇔ 位置座標の関数

  （ ∵ 相対論的場の量子論）

↓

点（“粒子”）の集合の関数関係（相互作用/力）の総体

‖

■ 数字・記号で表現される世界

例2）我々が“物質的実世界を認識する”とは？

‖

情報を得ること。

情報の種類

- 言語情報： 文字・数字・記号（図形的区別）
  音声言語（音声的区別）
  ＋文法（関係性）⇔ 論理情報

- 五感覚 ： 視覚、 聴覚、 触覚、 味覚、嗅覚

“非論理情報”（映像） （音響） （圧力） （化学変化）

↓ ↓ ↓

光（電磁波） 音波 分子間力

↓ ↓

波長・振動数・振幅 原子間の電子のやり取り

↓

電磁気力

数値 数値・関数

■ 文字・数字・記号で表現できる！

■ コンピュータという概念の成立：（情報処理＝計算）

すべての情報 ← 文字・数字・記号で表現できる。（論理情報）

↓

情報 ＝ “記号”（digit：数字）の列

↓

0, 1 の列（binary digit 略して “bit”：2進法）

↓ ← 記号論理学/基礎数学（1930年代から）

ブール代数：「0, 1 の列の代数計算により 論理の体系はすべて表現可能」

↕

■ すべての（論理）情報は 0, 1の計算で表現し尽くせる。

これを実行する概念上の “万能計算機” ← ライプニッツ のidea（18C）
（易経の陰陽道：2進法）

↓

チューリング機械（数学モデル）

↕

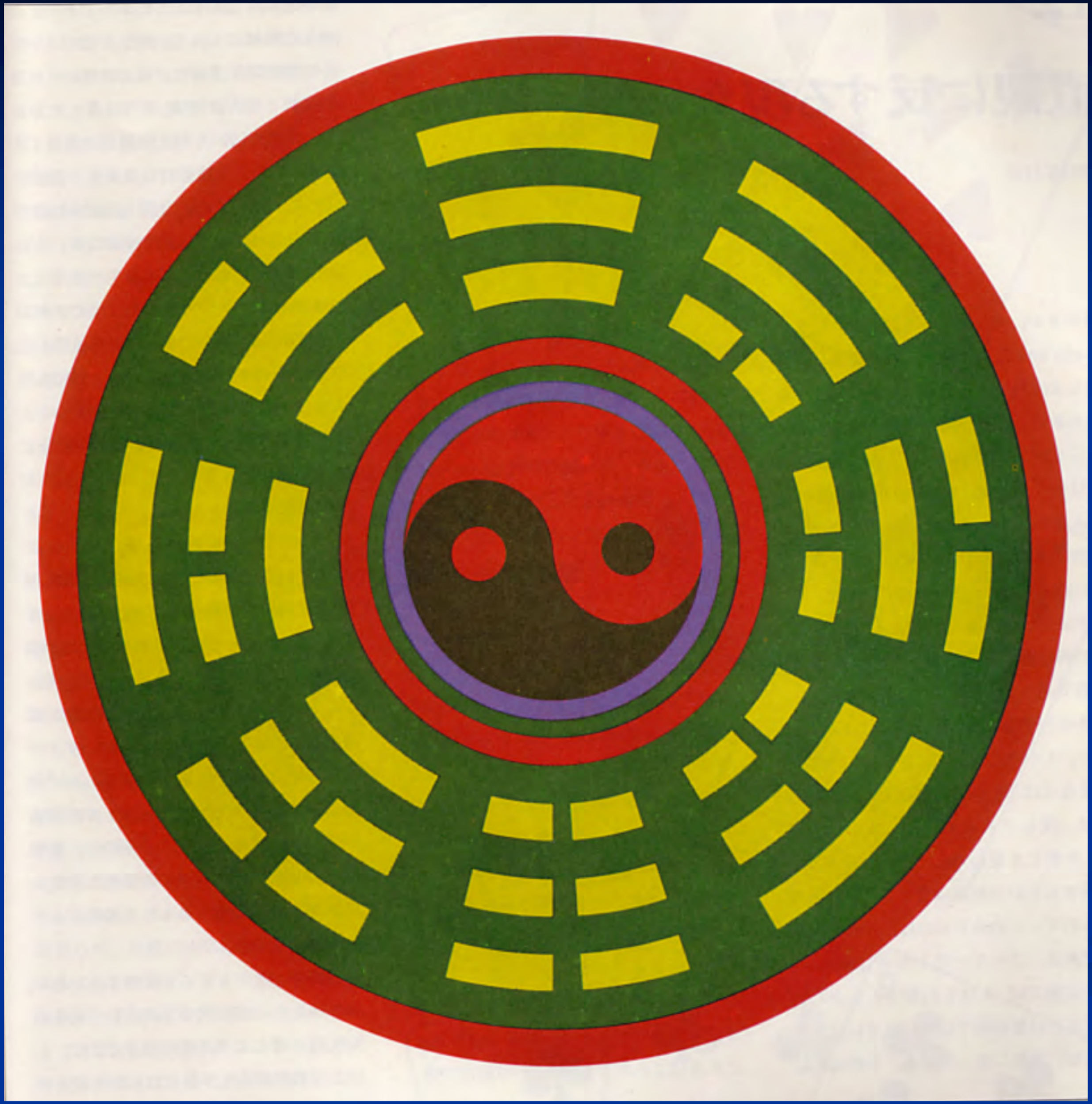
この機械を工学的に実現できる原理

■ ノイマンの「コンピュータの原理」（1948）

“大極図”

古代中国の
陰陽の象徴

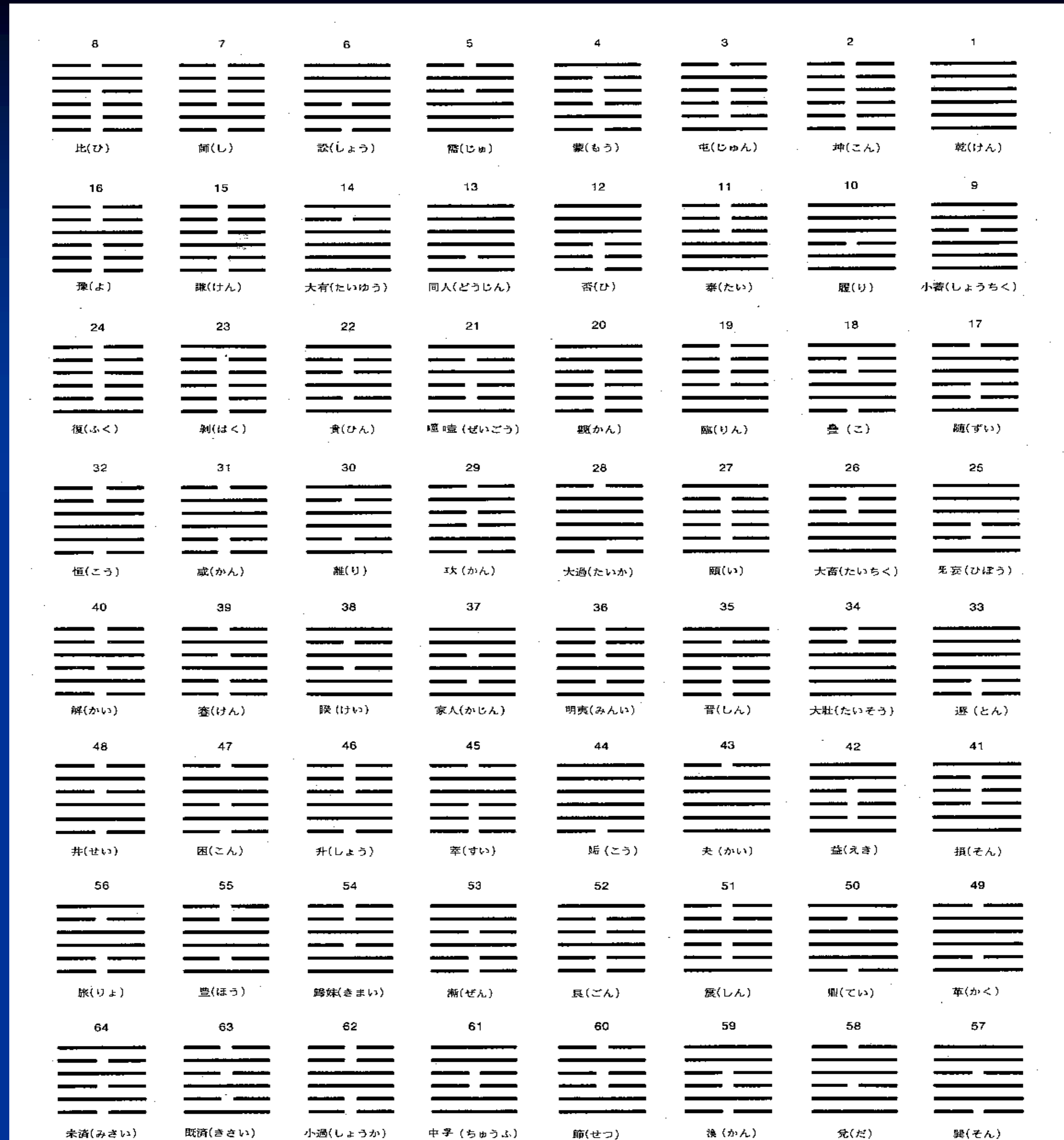
三重記号の配列
8個＝2^3通り
6ビット



易経の六重記号の文王配列

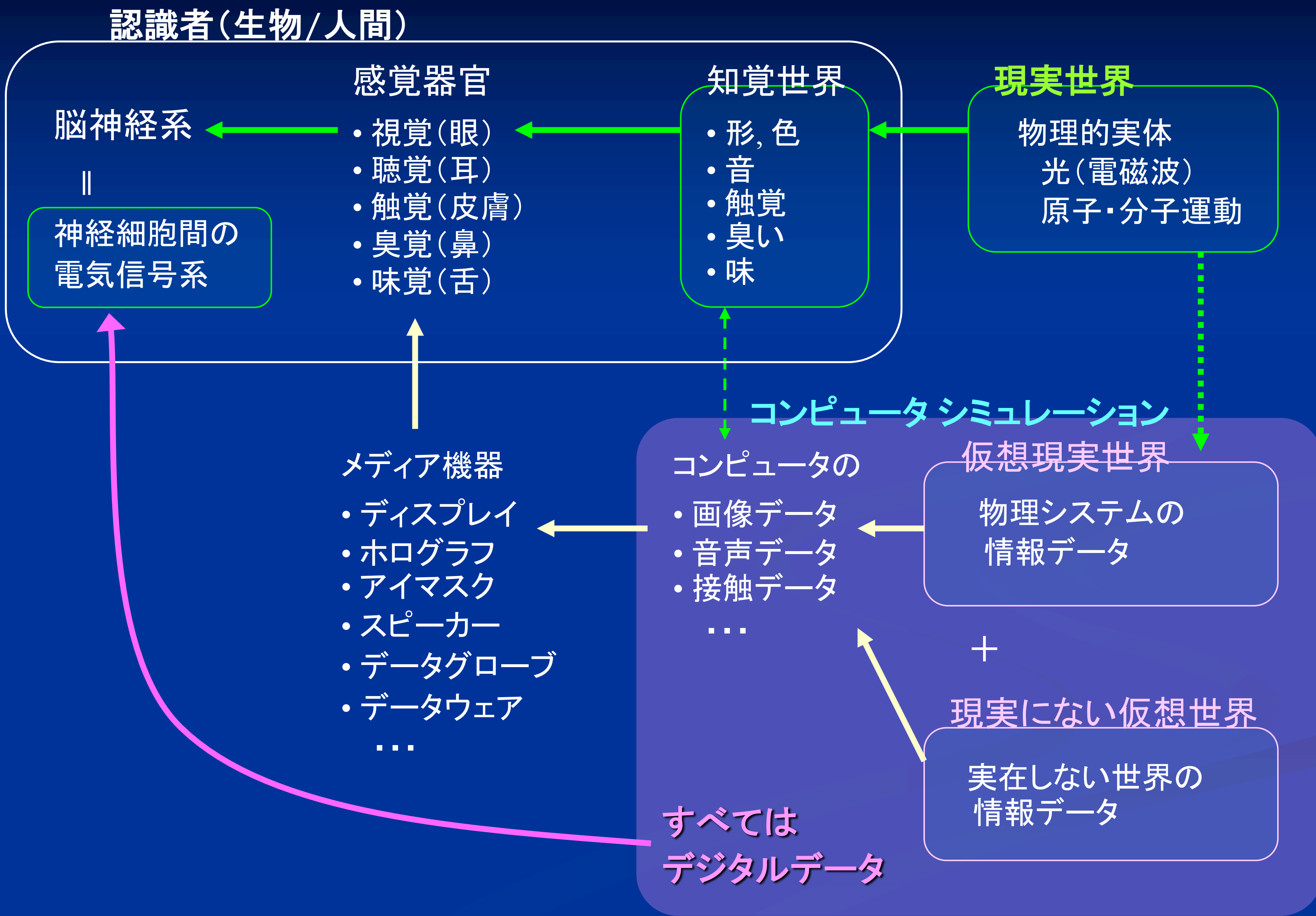
64個＝2^6 通り

6ビット



64個の易経の六重記号の文王配列

■ シミュレーション と バーチャルリアリティ（virtual reality）



2. シミュレーション科学とは

２．１　シミュレーションという研究方法

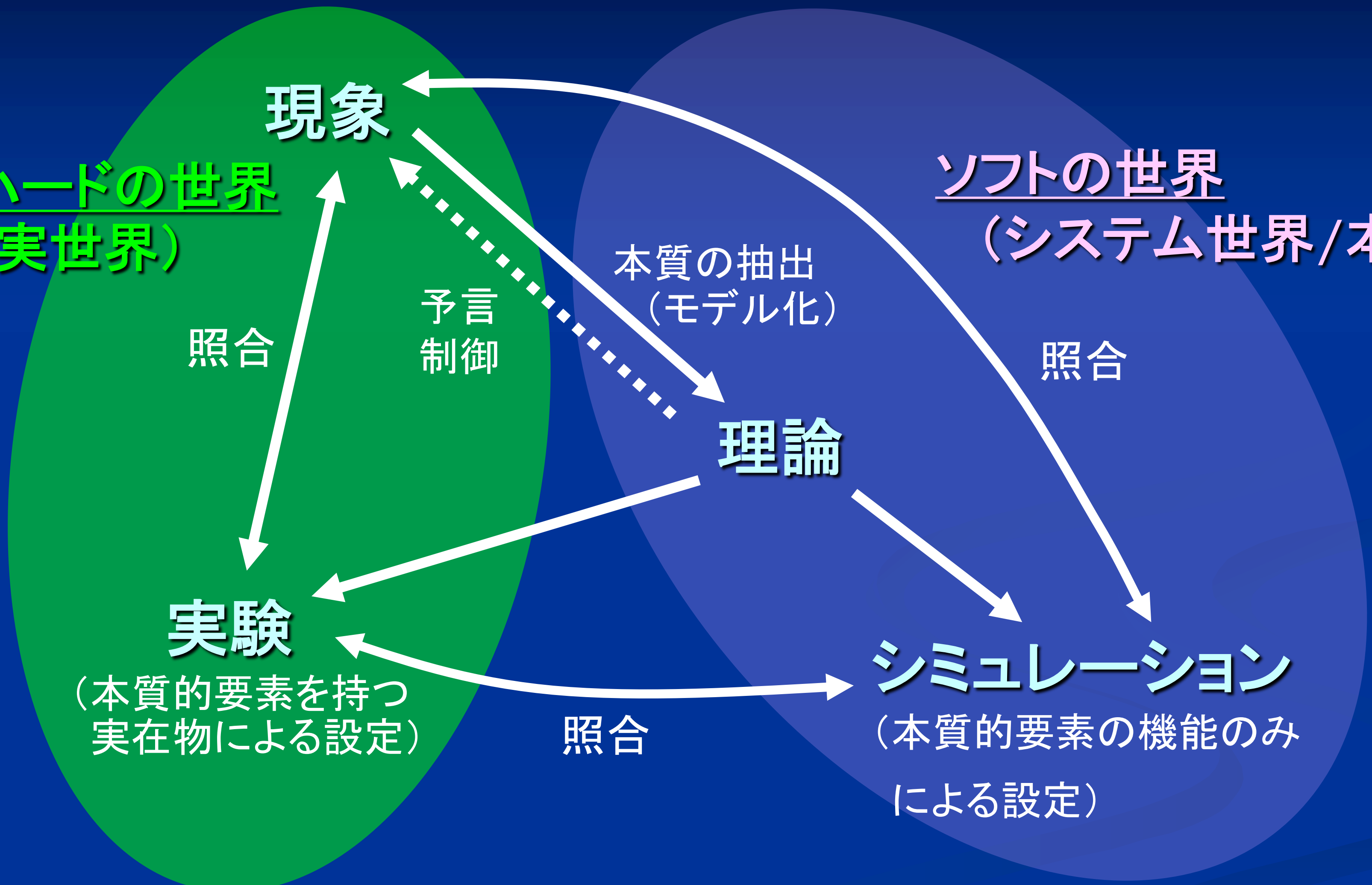
２．２　シミュレーションの方法が有力である研究対象

（共通する一般的性質：⇒　“複雑性”）

- 世界の構造・階層性（ミクロ：微視→マクロ：巨視）
- ミクロからマクロに発現する新たなソフト／性質
- “複雑”な現象とは何か？
- 複雑さを特徴付ける概念

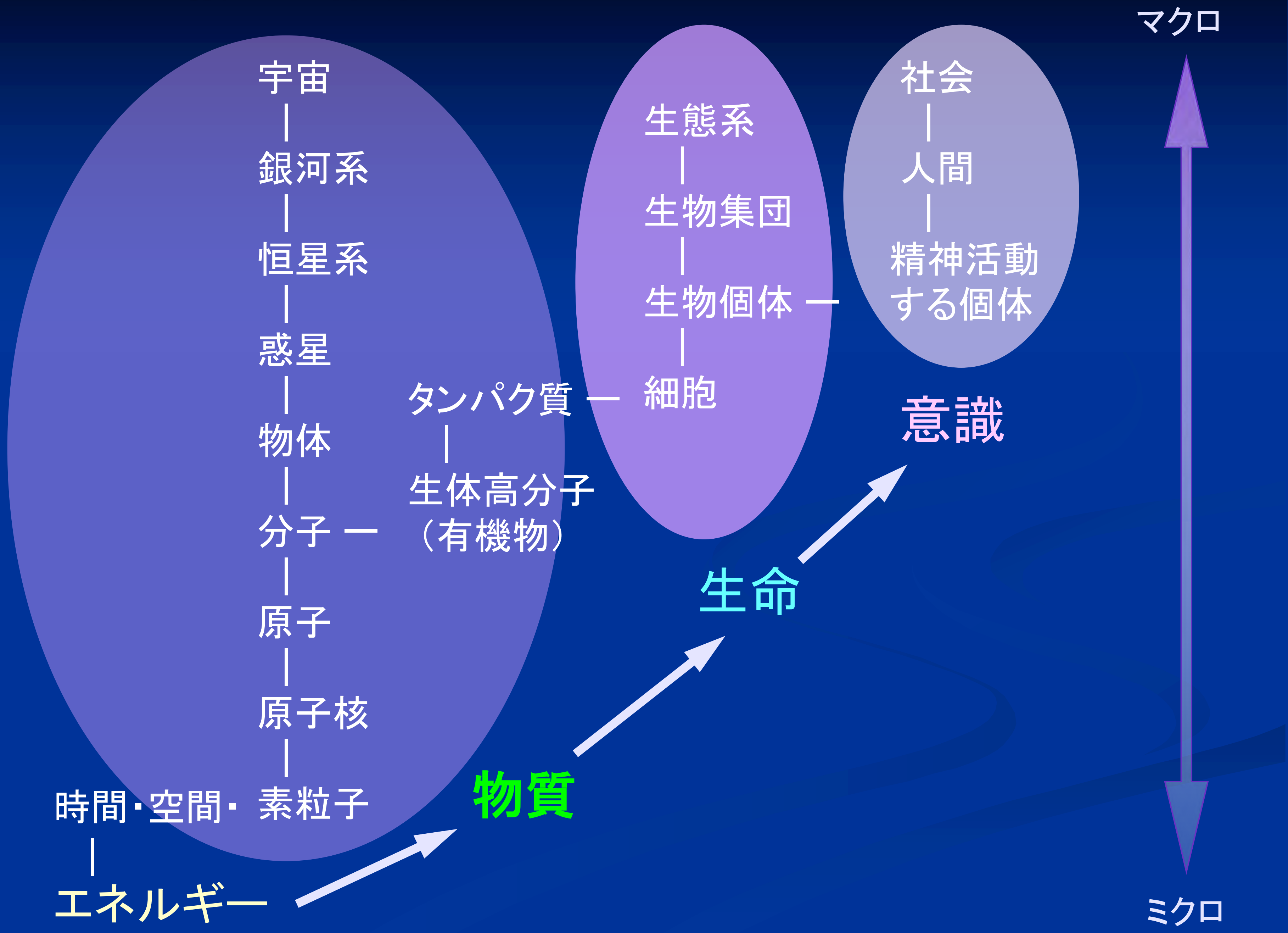
：

シミュレーションという研究方法



■ シミュレーションでのみ現実との照合が可能な現象
（宇宙/生物の進化、社会/経済現象、地球環境、e.t.c）

世界の構造と階層性

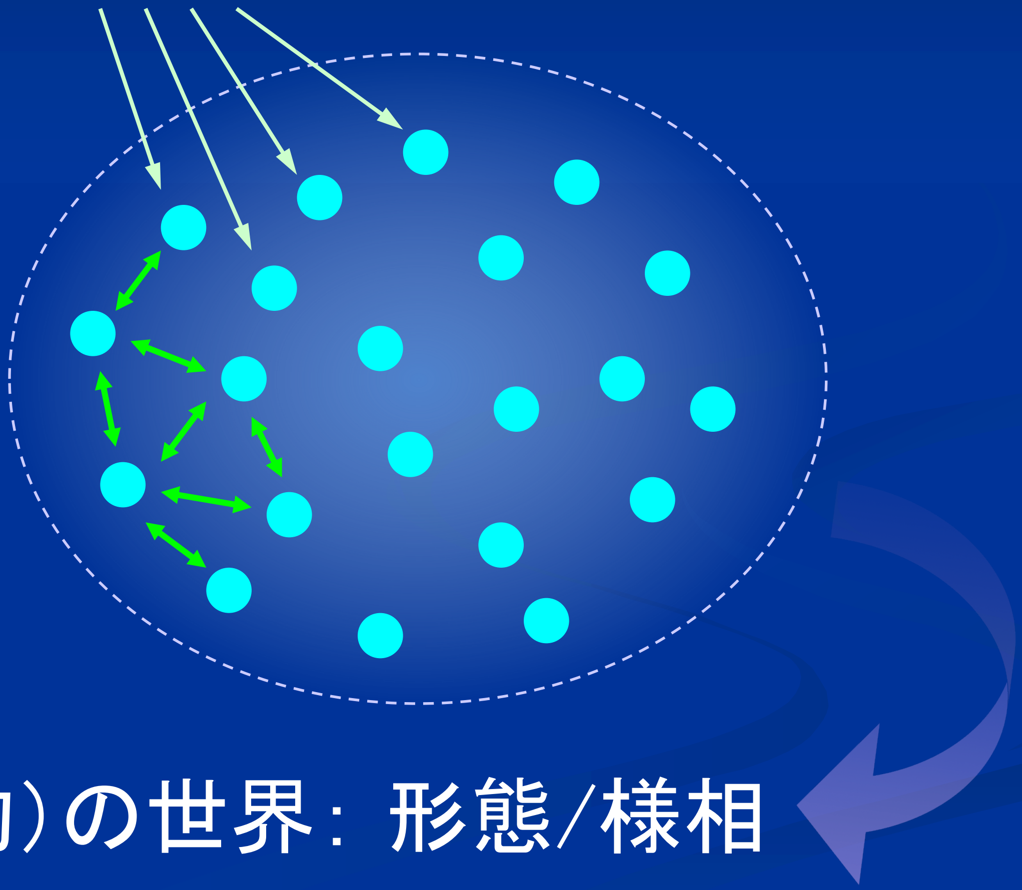


マクロ
ミクロ
宇宙
銀河系
恒星系
惑星
物体
分子
原子
原子核
素粒子
時間・空間・
エネルギー
タンパク質
生体高分子
（有機物）
生態系
生物集団
生物個体
細胞
社会
人間
精神活動
する個体
物質
生命
意識

世界（階層）はどのように作られるか？

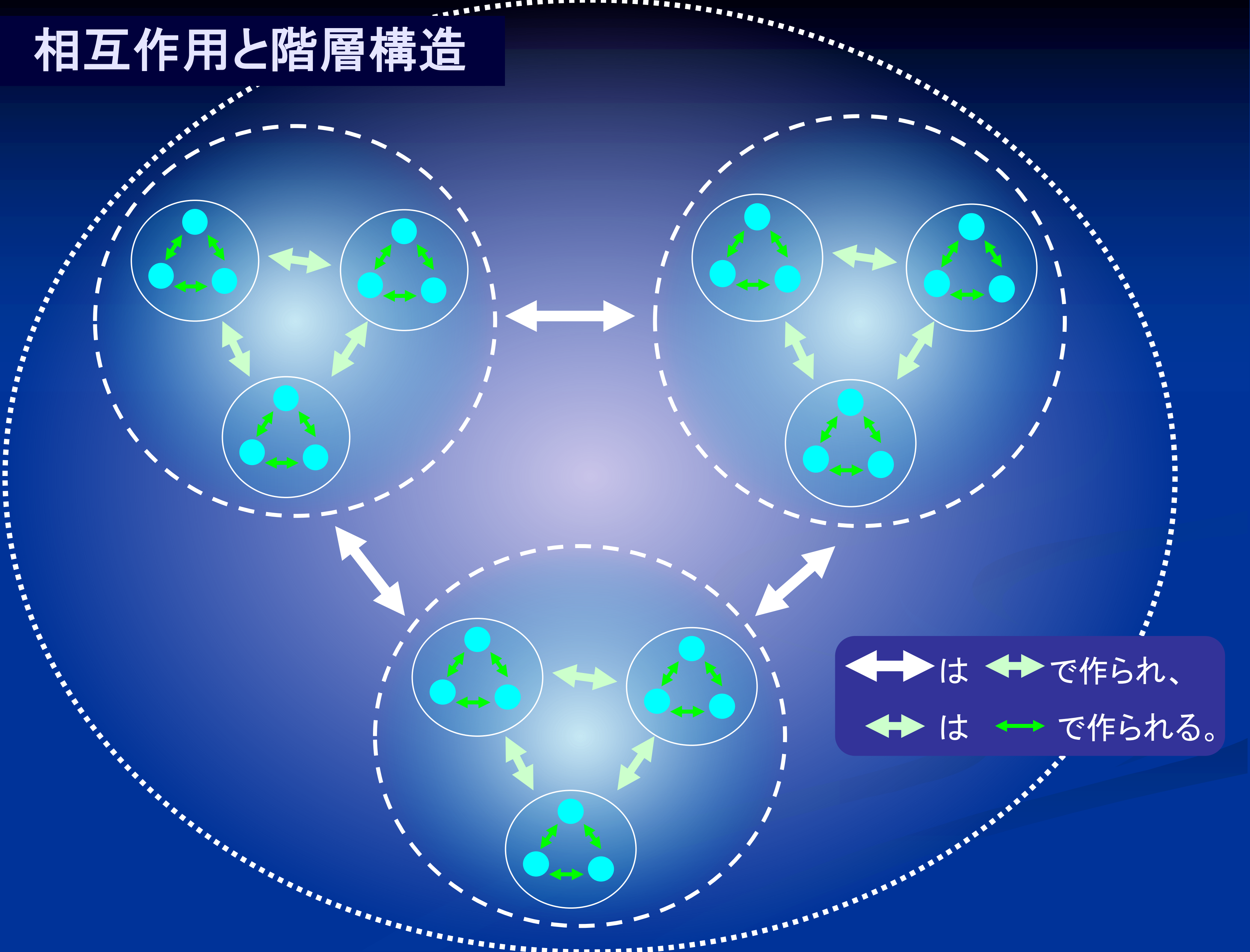
■ ミクロ（微視的）構成分子の集団：多体系

構成分子の間の
微視的相互作用
（Interaction）
＝
関係性



■ マクロ（巨視的）の世界：形態/様相

相互作用と階層構造



世界はすべて、ミクロ世界の集団の相互作用の総体として形成されたマクロな“もの”として存在する。

ミクロ（微視世界）	相互作用	マクロ（巨視世界）
素粒子：クォーク・レプトン	QCD	陽子/中性子(ハドロン)
陽子/中性子	核力	原子核
原子核・電子	電磁気力	原子
原子	〃	分子
分子	分子間力	物質
物質	重力	星
星	〃	銀河
銀河	〃	宇宙
アミノ酸	化学結合	タンパク質
タンパク質	？	細胞
細胞		生物
生物	？？	生態系
スウォーム, 人間		社会
数・記号/文字		言語
言語		意味

マクロ構造に
新しい性質のソフト
‖ が発現！
“複雑さ”/非自明

複雑さとは？（「構成分子や要素の数が多い」ということではない！）

- **種類の多さの比較:**

ミクロ　　マクロ ⇔ ミクロな構成分子の組み合わせ

陽子/中性子・電子　3 →　原子核/原子　10^2

原子（元素）　10^2 →　無機物質分子　10^4

C, H, N, O　4 →　有機物質分子 ＞ タンパク質の種類

生物の種類 10^8

塩基 A, G, C, T　4 →　１本の**DNA**が表せるタンパク質の種類 10^{200000}

- **数の多さの比較**

砂丘の砂粒の数 ＝ 10^{16}

人間の体細胞の数 ＝ 10^{15} ＝2^{50}（50回の細胞分裂）

宇宙の星の数＝10^{22}

物質を作る分子の数＝10^{24}（アボガドロ数）

ルービックキューブの面の様子の数: 54面（6色）＝10^{20}

囲碁の打ち方の数: 19^2の格子点に2種類(白/黒)を置く ＝ 10^{140}

情報量エントロピー ＝ log(W:組み合わせの数)

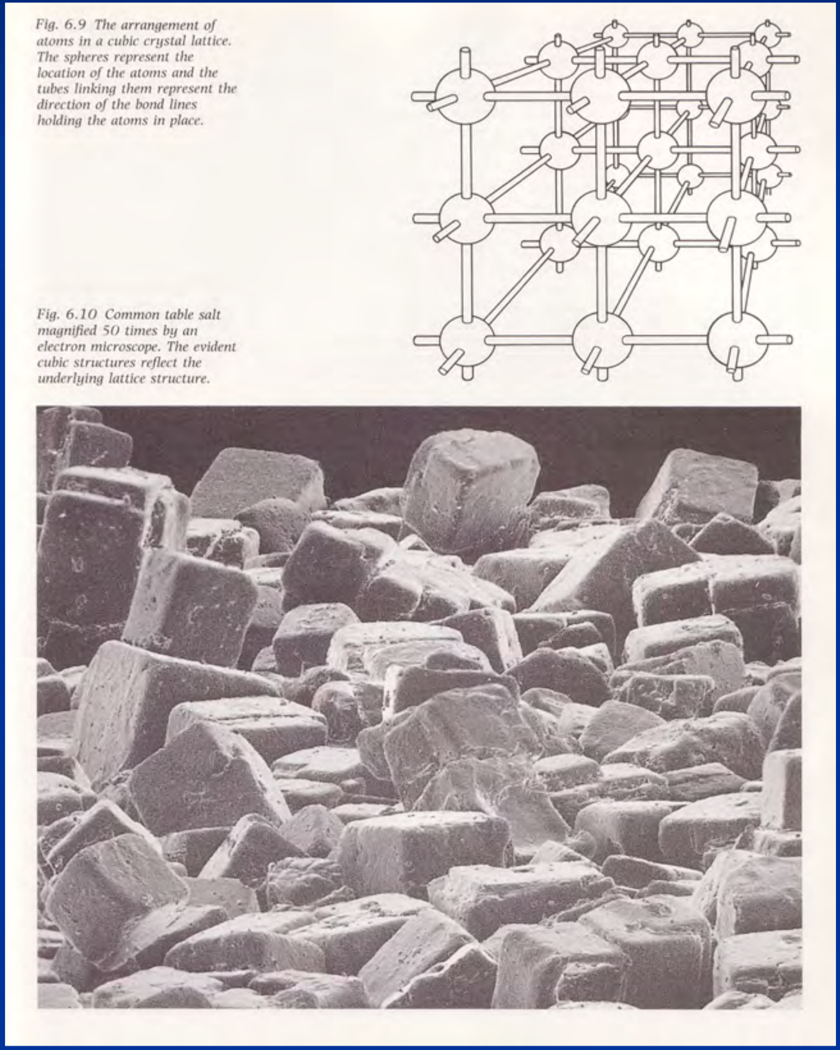
複雑さ：少ない要素でも 組み合わせの多さ ⇒ 多様さの発現

↑

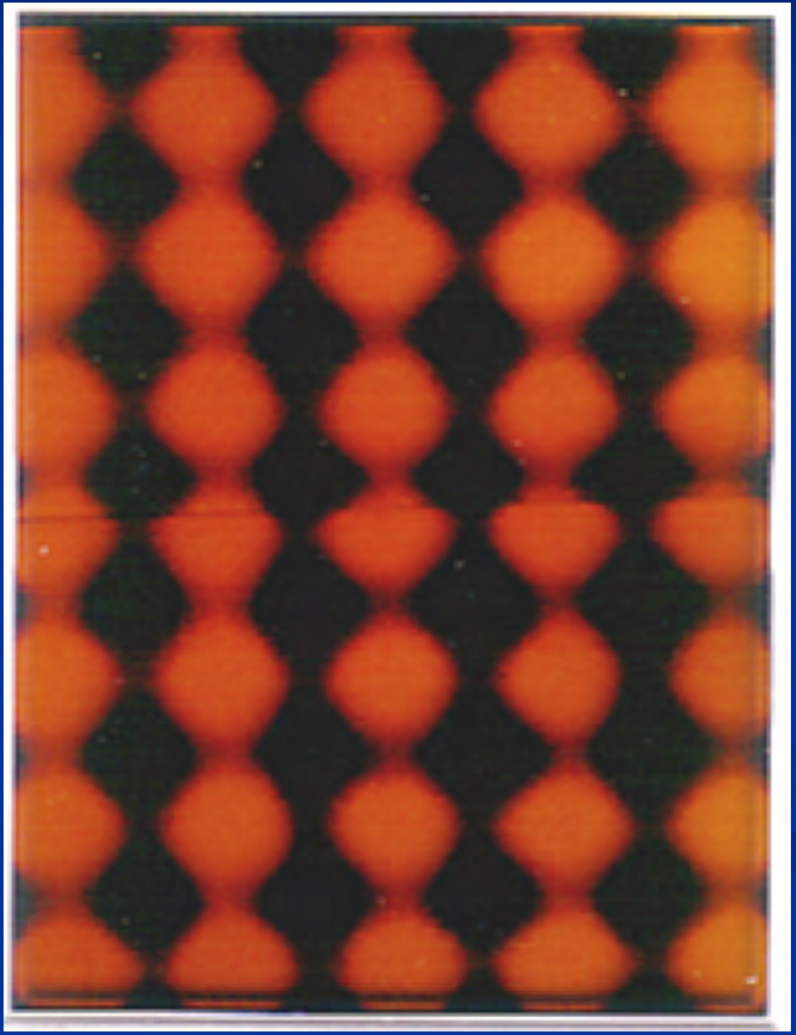
相互作用/ルールの性質が反映

- 形態の多様さの比較:
  - 物質の構造は単純: 周期的 → 情報量は少ない

食塩の結晶: NaCl 10^{-4} m



金の分子配列: Au 10^{-8} m

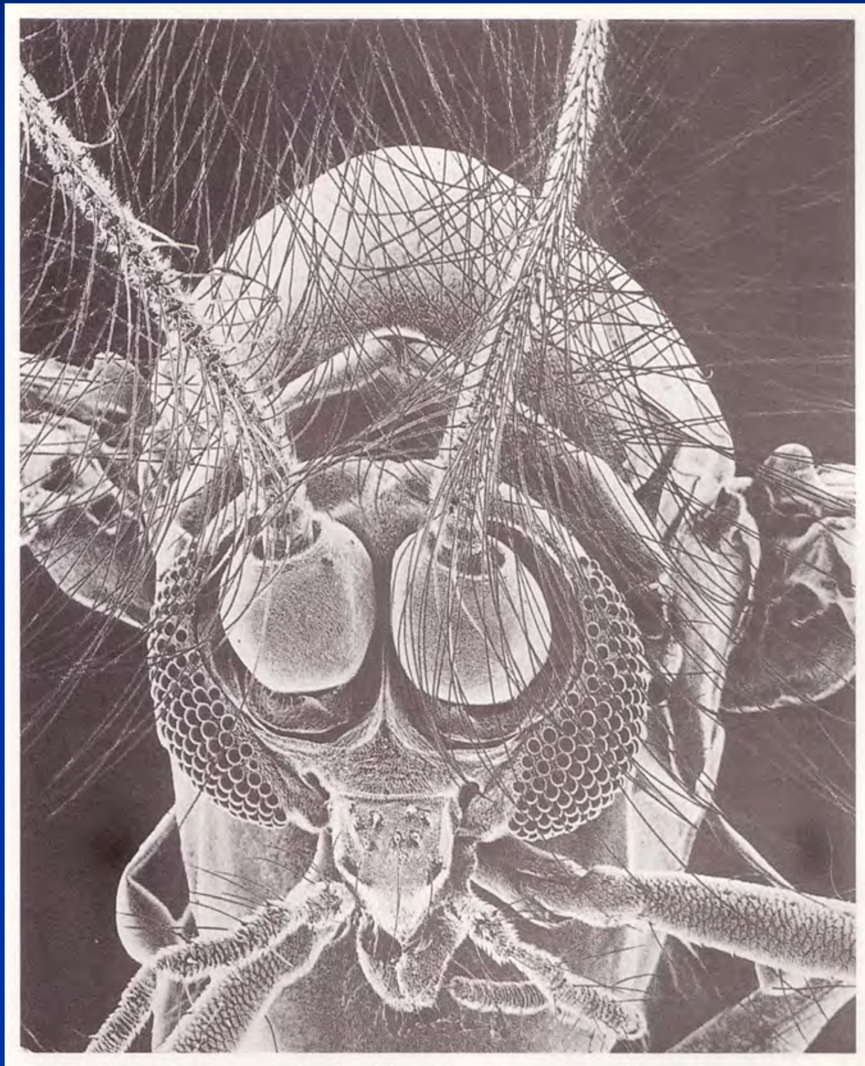


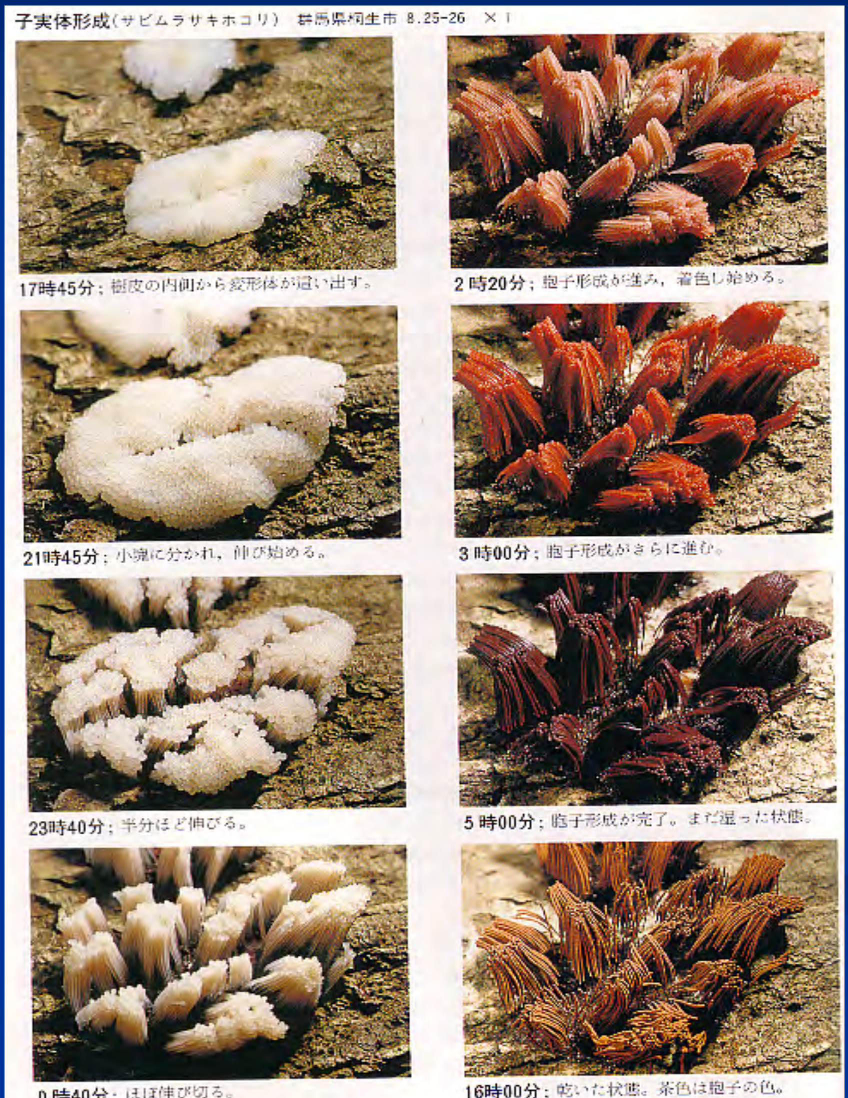
● 生物の形態は複雑：非周期的 → 情報量が多い

蚊(か)の頭部 ：10^{-4} m

変形菌(粘菌変形体)の多様な形態 ：10^{-3} m

子実体の形成





複雑/非自明(難解)な現象の一般概念:【今後の話の地図】

“システム” としてのマクロ現象

形態形成・自己複製(増殖)・代謝・
進化・集団運動・同期/引き込み・

現実の対象:

生物・社会・スウォーム・脳・
非平衡多体系物質現象・

基盤になる一般概念
抽象概念(数理的概念)

- カオス
- 自己相似性(スケーリング/フラクタル)
- 相転移(臨界現象)/分岐/カタストロフィ
- パターン形成
- ホメオダイナミックス(代謝)
- 計算論的複雑さ
- “複雑性”

モデル/システムの例

- 2重振り子, 3体問題, Li-Yorkカオス
- カントール集合, マンデルブロー集合
- Isingスピン系, CA, 力学系
- CA, ライフゲーム
- OVモデル
- アルゴリズム,PNP問題
- CA, ライフゲーム, 力学系

◆ 非線型性 (≠ 線型性)
◆ 非平衡系 (≠ 平衡系)
◆ 非保存系/散逸系 (≠ 保存系)
◆ 離散性 (≠ 連続性)

3. シミュレーション科学で見える概念

抽象概念(数理的概念)

- カオス
- 自己相似性(スケーリング/フラクタル)
- 相転移(臨界現象)/分岐/カタストロフィ
- パターン形成
- ホメオダイナミックス(代謝)
- 計算論的複雑さ
- “複雑性”

カオス(Chaos):周期性から → 非周期性へ/⇒カオス

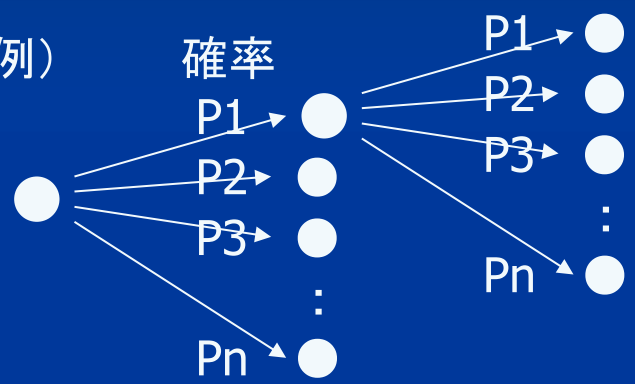
決定論 :「今の状態」→「次の状態」が一意的に決まる。 [決定論的世界観]

"すべての変化は必然である。" ⇔ 予測可能

と ● → ● → ● → ● → ● → ● → ● → ● → ● → ● → ・・・

非決定論 :「今の状態」→「次の状態」が一意的に決まらない。

例) 確率



[確率論的世界観] ⇔ 予測不可能

カオスとは ⇒「決定論であるが、予測不可能な過程」!? (厳密な定義は数学で)

具体例 : ■ 古典力学

単振り子 → 2重振り子、1体問題・2体問題 → 3体問題

■ 力学系

Meiのモデル(個体数の増殖)、Li-Yorkのカオス

■ セルオートマトン(Wolframモデル・Langton)

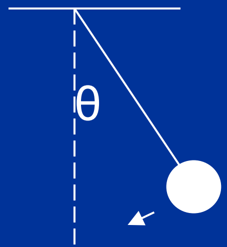
カオス(Chaos):周期性から → 非周期性へ/⇒カオス

■ 古典力学 : Newtonの運動方程式(2階の微分方程式)
を解けば

ある時刻 t_0 : 位置 x_0, 速度 v_0
が わかれば、
→ 未来の任意の時刻 t : 位置 x(t), 速度v(t)
が 完全にわかる。
[決定論]

■ 振り子

・単振り子



運動方程式: 位置θ(t)

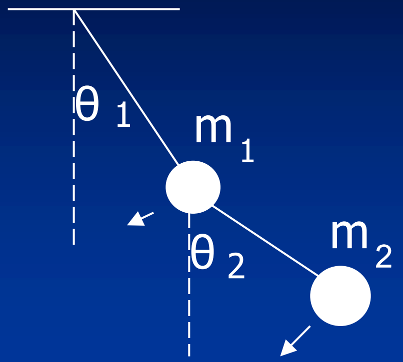
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$
$$= -\frac{g}{l}\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}\theta^{2n-1} + \cdots\right)$$

非線型(1次式ではない) 単純ではないが、
やはり 周期的運動

線型化(1次式に近似) 単振動:周期的運動

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\,\theta$$

・2重振り子



運動方程式: 位置$\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$
連立微分方程式

$$(m_1+m_2)l_1^2\frac{d^2\theta_1}{dt^2}+m_2l_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + m_2l_1l_2\sin(\theta_1-\theta_2)\frac{d\theta_2}{dt^2}^{2}+(m_1+m_2)gl_1\sin\theta_1=0$$

$$m_2l_2^2\frac{d^2\theta_2}{dt^2}+m_2l_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\frac{d^2\theta_1}{dt^2} - m_2l_1l_2\sin(\theta_1-\theta_2)\frac{d\theta_1}{dt^2}^{2}+m_2gl_2\sin\theta_2=0$$

2つの非線型系の結合：

2つのおもり m_1, m_2 の運動は カオス的！

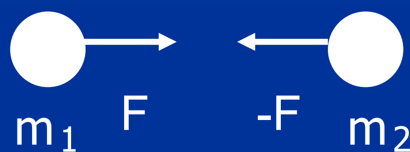
■ 決定論である微分方程式の解
(解析的には解けない。⇒ 数値シミュレーションで運動を追跡する。)
であるにもかかわらず、予測不可能な運動をする。

■ 重力(万有引力)/クーロン力 : 逆2乗力 による粒子の運動

・1体問題:

自由運動(慣性運動)

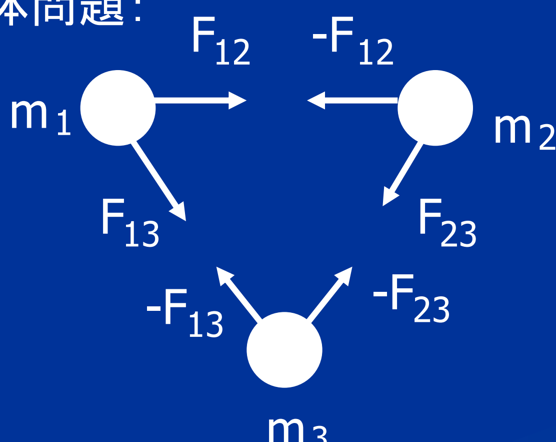
・2体問題:



$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$$

周期運動

・3体問題:



カオス的運動

■ 個体数増殖のモデル：Meiの力学系/Logistic写像

x_n：n年目のある生物の個体数 → $x_{n+1}= f(x_n)$ で変化する.：写像(mapping)

● 個体数の時間的変化：$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \cdots$　　［決定論］

i) 増殖率: $x_{n+1}/x_n =a(>0,$ 一定$)$とする。⇒ $x_{n+1}= ax_n$ よって $x_n= a^n x_0$

■ $0<a<1$: $x_n\ (n\rightarrow\infty) \rightarrow 0$　死滅

■ $1<a$　: $x_n\ (n\rightarrow\infty) \rightarrow \infty$　際限なく増殖

}　非現実的

ii) 増殖率: $x_{n+1}/x_n =a(1-x_n)$とする。⇔ 個体数が増えていくと増殖率が抑えられ、
1(ある限界単位)で増殖率=0になる。

$$\Rightarrow x_{n+1}= ax_n(1 - x_n)$$　現実的

・$x_n\ (n\rightarrow\infty)$ →どうなるか？ ⇒ $n\rightarrow\infty$で収束するならば、$x_n =x_{n+1}=x_\infty$
つまり $x= ax(1 - x)$の解：$x=0$ または $(a-1)/a$

■ $0<a<1$: $x_n\ (n\rightarrow\infty) \rightarrow x=0$　死滅

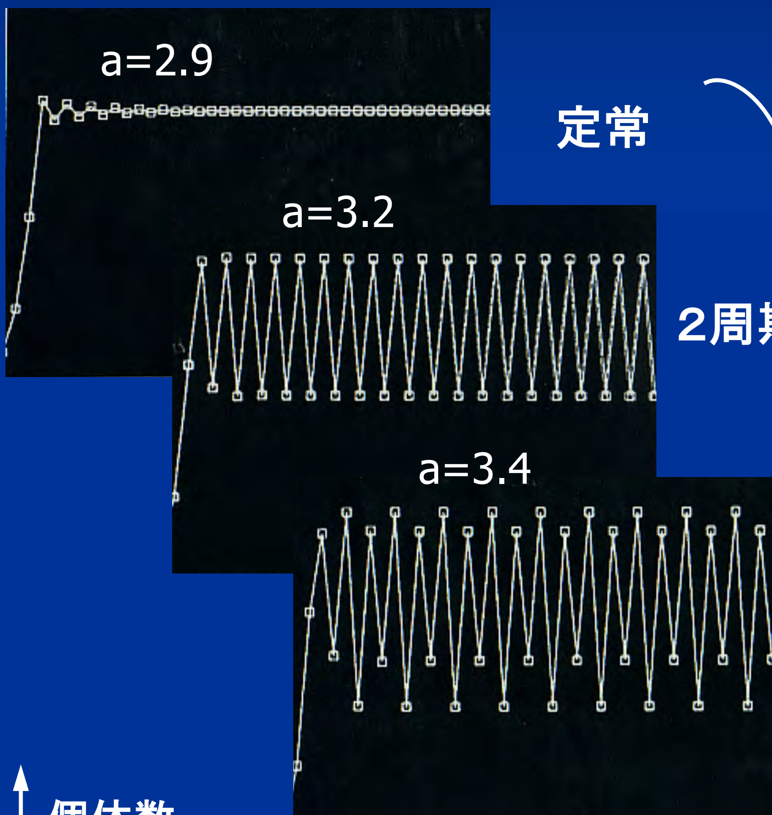
■ $1<a$　: $x_n\ (n\rightarrow\infty) \rightarrow x=(a-1)/a$ 一定数に収束するように思えた。← 実はそう単純ではない ?!

↑
シミュレーション

個体数増殖のモデル：Mei の力学系のシミュレーションの結果

■ x_n：n年目の個体数 → $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ で変化する.

個体数の時間的変化：$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \cdots$



定常

2周期

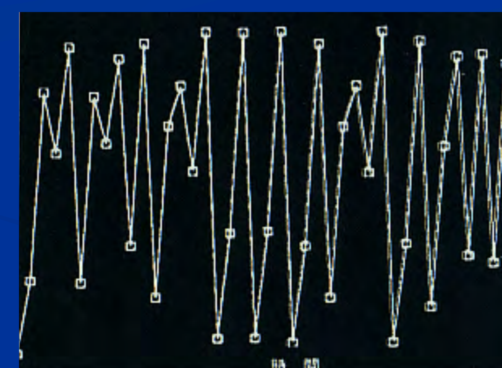
4周期

8周期

・・・

周期的

初期値に依存せずに、aについて決まった数値に収束する。（エルゴード性）



無限周期　a≧ 3.5699456....

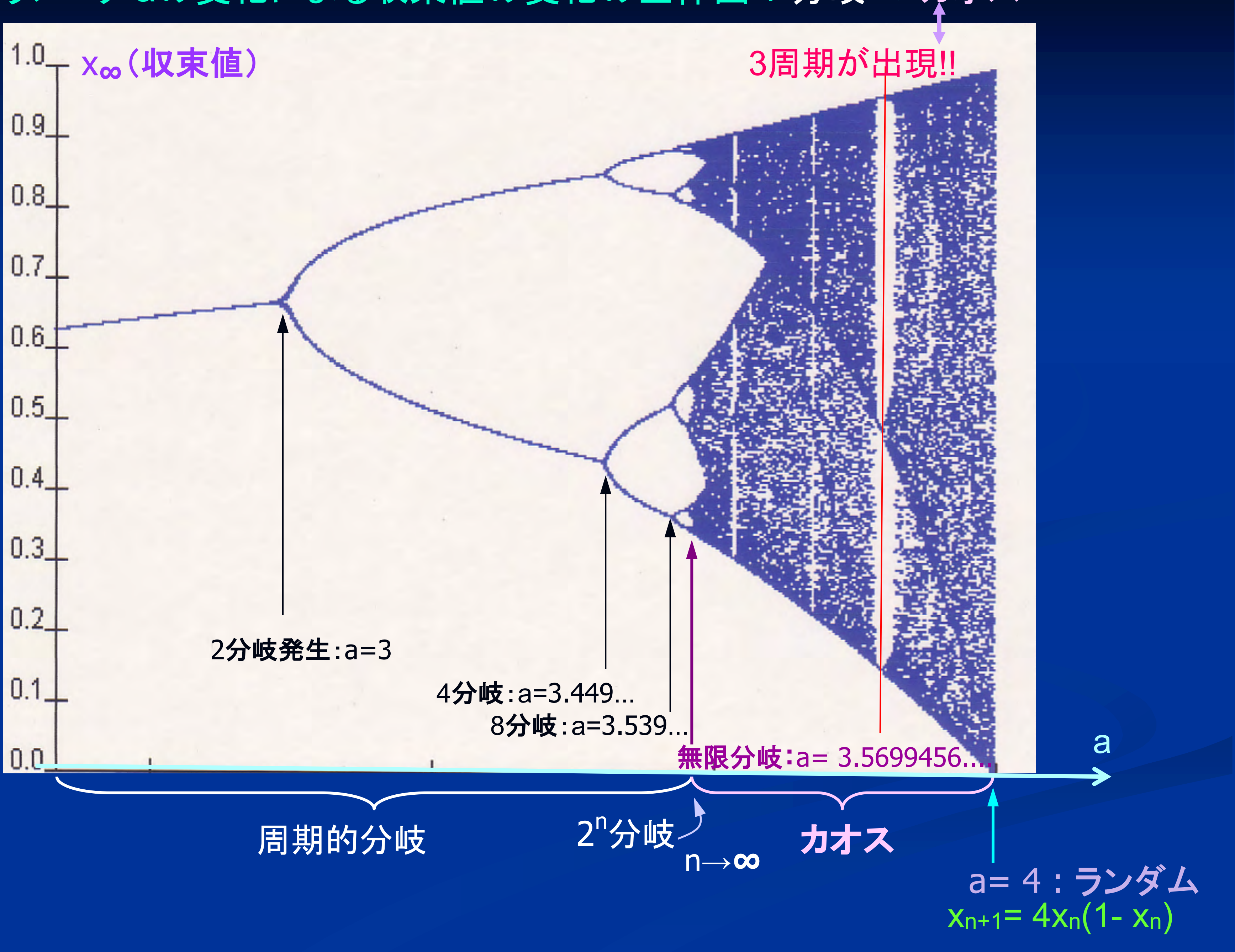
個体数

時間変化

■ 非周期的 ⟷ カオス

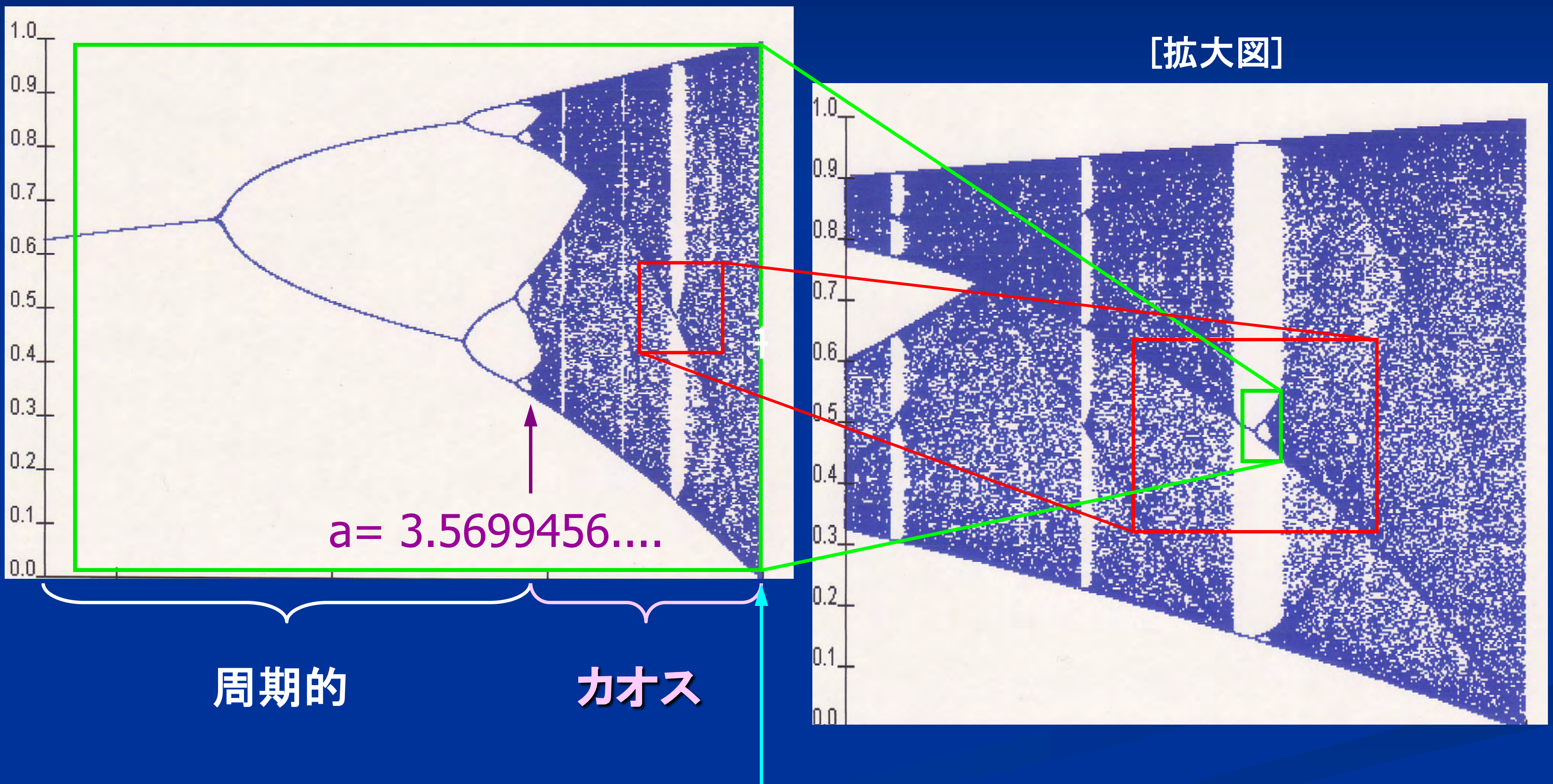
■ 僅かな初期値の違いで 、軌道が大きく変動する。（複雑な挙動）

パラメータ aの変化による収束値の変化の全体図：分岐 ⇒ カオスへ



カオス（Chaos）の自己相似性

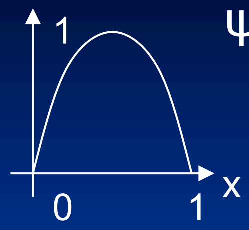
- パラメータ a の変化による分岐（周期の増加）の全体像



a= 4：ランダム (random)

$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$

■ Li-Yorkカオス写像について $I=[0,1]$は不変集合（Invariant Set）



$\psi(x)=4x(1-x),\ I=\{x \mid 0\leqq x\leqq 1\}$ について　$I\ni x \to x'=\psi(x)\in I$,

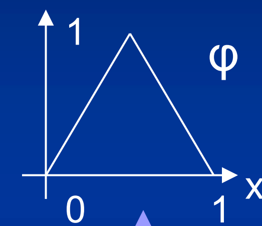
i.e.　$I=\psi(I) \Leftrightarrow I\ni x_0 \Rightarrow x_0 \to x_1 \to x_2 \to x_3 \to \cdots \in I$

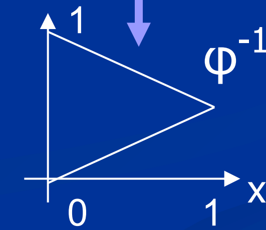
同値

■ カオス写像の逆関数 ⇔ 縮小写像 $R(x)$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x & (0\leqq x\leqq 1/2) \\ 2(1-x) & (1/2\leqq x\leqq 1) \end{cases}$$

, also　$I=\varphi(I)$





$R(x)=\varphi^{-1}(x)=F_1(x)\cup F_2(x)$　$(x\in I)$

$F_1(x)=x/2$,　$F_2(x)=1-x/2$

$I=\varphi^{-1}(I)$

$=F_1(I)\cup F_2(I)$　明らか!

$=F_1(F_1(I)\cup F_2(I))\cup F_2(F_1(I)\cup F_2(I))$

$=\quad\cdots$

$=\cup_w\ (n\to\infty)\ \underbrace{F_{w1}\cdot F_{w2}\cdot F_{w3}\cdots\cdots F_{wn}(I)}_{0.\ w1\ w2\ w3\cdots\cdots\cdots wn\cdots\cdots}$

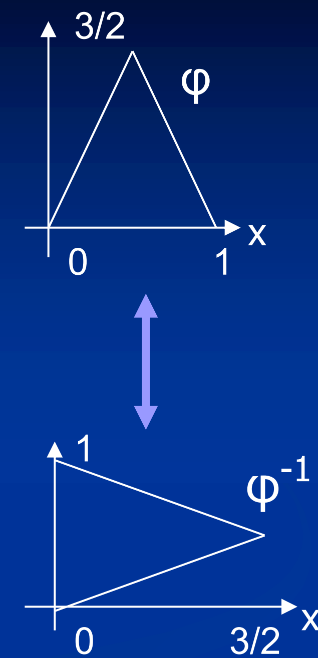
（2進数表示: w.=1(0)or2(1)）

$I=R(I)=R\cdot R(I)=R\cdot R\cdots\cdot R(I)=\cdots\cdot=R^\infty(I)$:収束

$\Rightarrow$　$R^\infty(I)=R(R^\infty(I))$　i.e. $R^\infty(I)$はRについての不変集合

■ 別のカオス写像についての不変集合(Invariant Set)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3x & (0 \leqq x \leqq 1/2) \\ 3(1-x) & (1/2 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$



殆どの場合 $I=[0,1] \ni x_0 \Rightarrow x_0 \to x_1 \to x_2 \to \cdots \to \pm\infty$

不変集合: $C=\varphi(C)$ は存在するか?

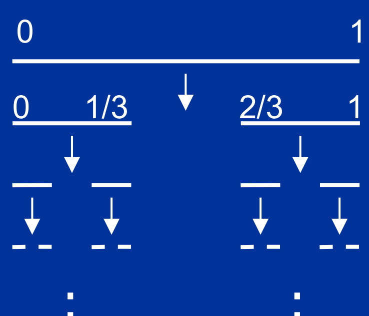
$\Leftrightarrow C \ni x_0 \Rightarrow x_0 \to x_1 \to x_2 \to x_3 \to \cdots \in C$

$\Updownarrow$

$C=\varphi^{-1}(C)$

縮小写像: $R(x)=\varphi^{-1}(x)=F1(x) \cup F2(x) \quad (x \in I)$

$F1(x)=x/3 , \quad F2(x)=1-x/3$



I

$R(I) \quad = F_1(I) \cup F_2(I)$

$R \cdot R(I) = F_1(\, F_1(I) \cup F_2(I)) \cup F_2(F_1(I) \cup F_2(I))$

$R \cdot R \cdot R(I)$

$\vdots$

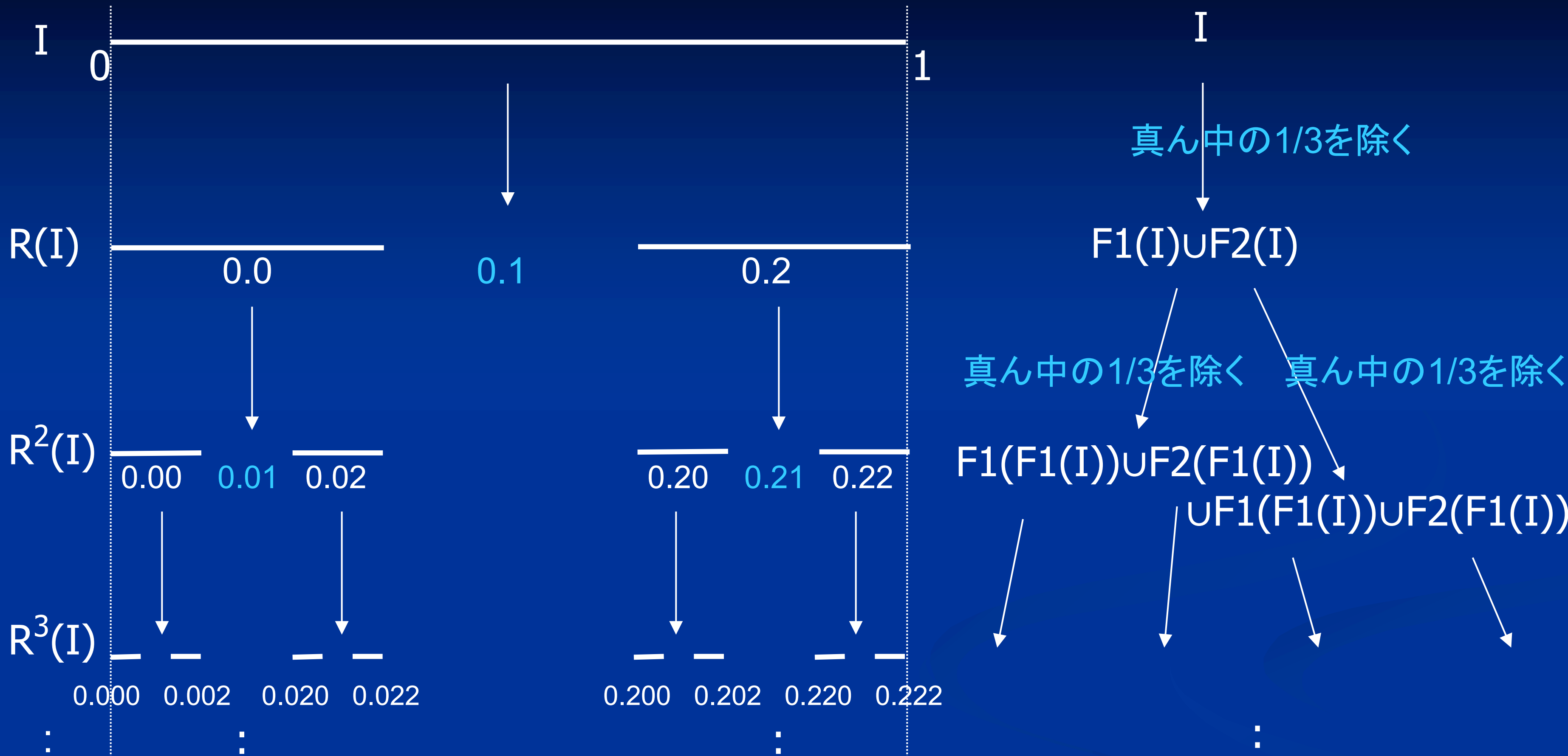
$R^{\infty}(I) = C = R(C)$: 不変集合 ⇒ "Cantor集合"

(自己相似図形)

$= \cup_{w\,(n \to \infty)} F_{w1} \cdot F_{w2} \cdot F_{w3} \cdots\cdots F_{wn}(I)$

$0.\, w1\ w2\ w3 \cdots\cdots\cdots wn \cdots\cdots$ (1(0),2(2)からなる3進数)

Cantor集合：C



取り除いた全部の長さの合計

$=1/3+2\cdot(1/3)^2+2^2\cdot(1/3)^3+\cdots=1$！

$R^\infty(I)=C$

Cantor集合

■ 自己相似図形：

・2^n (n→無限個)の点の集合 ＝ 連続無限（実数の数(かず)と同じ）

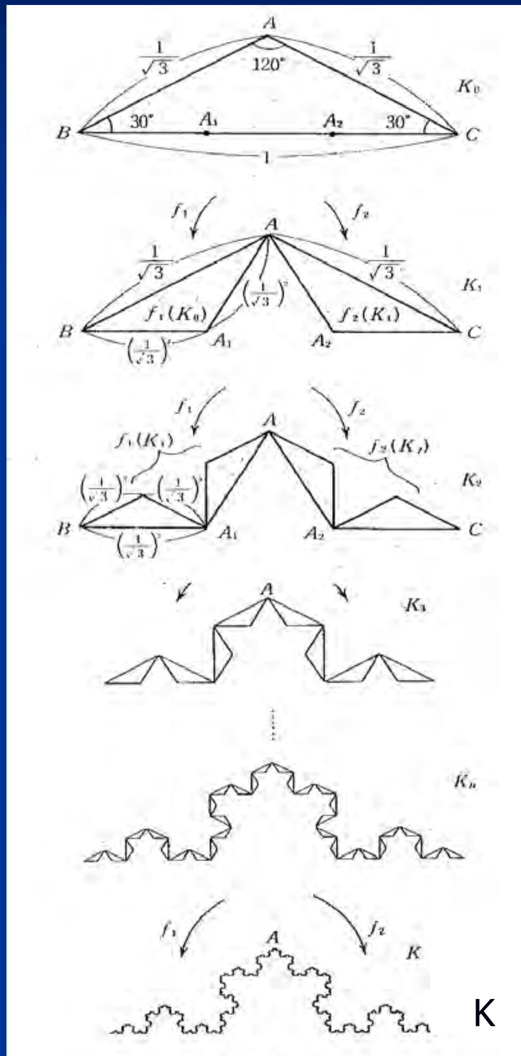
・連結してない点の集合 ⇒ 長さ=0 ‖

■ 0と2のみからなる3進数表示の小数の集合 ＝ 直線を作る点の数

自己相似図形 K ⇔ 縮小写像 R を無限回繰り返して作る。i.e. $K=R^{\infty}(I)$

■ Koch曲線：

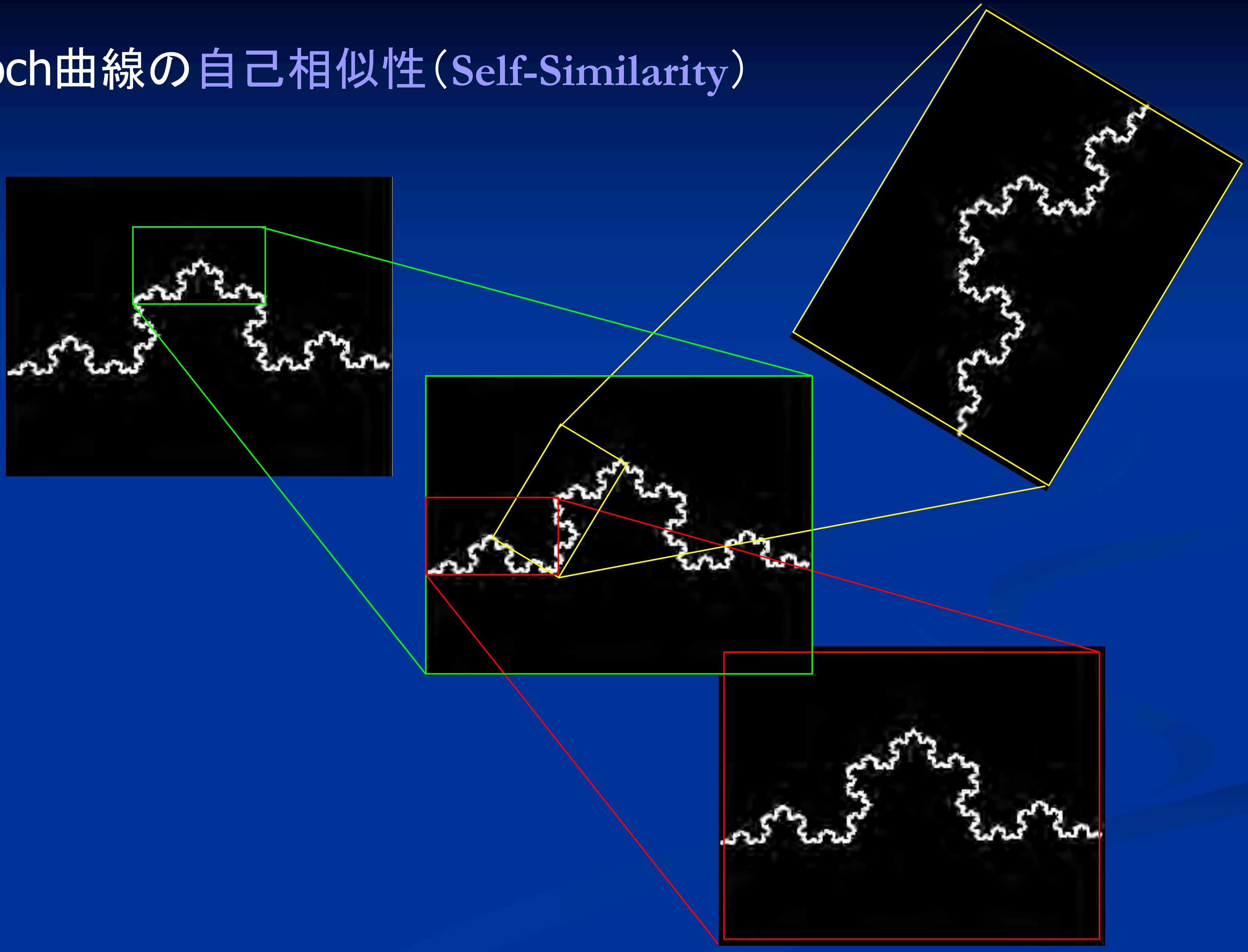
2つの相似な三角形に変換



各ステップの三角形 数	底辺の長さ／	総和	面積／	総和
1	1	1	$\frac{1}{4\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}$
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\times 2$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{1}{3}\times 2$
4	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\times 4$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 4$
2^n	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n\times 2^n$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^n\times 2^n$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
∞	0	∞ !!	0	0

Koch曲線：点の集合 = 連続無限， 長さ = ∞ !!

Koch曲線の自己相似性（Self-Similarity）



カオス写像φ⇔ 逆関数写像(縮小写像 $R=\varphi^{-1}$)

⇒ 不変集合 = 自己相似図形: $K=R^{\infty}$ の特徴

1次元内の図形(点の集合)	縮小写像 R	点の数	長さ
■ 直線 I=[0,1]	x/2∪1-x/2	連続無限: 2^n (n→無限個)	1(有限)
■ Cantor集合	x/3∪1-x/3	連続無限	0
■ Koch曲線		連続無限	∞(無限大)

1次元図形か? 次元とは?

長さとは?

相似次元: d

スケール½に縮小⇒相似図形の個数

線分(1次元): 2^1個

平面(2次元): 2^2個

立体(3次元): 2^3個

スケール1/aに縮小⇒相似図形の個数 b

$b=a^d \rightarrow d = \log b / \log a$

測度次元(Hausdorff次元): h

有限の大きさ(測度)を与える次元

線分(1次元): $(dx)^1$ 長さ

平面(2次元): $(dx)^2$ 面積

立体(3次元): $(dx)^3$ 体積

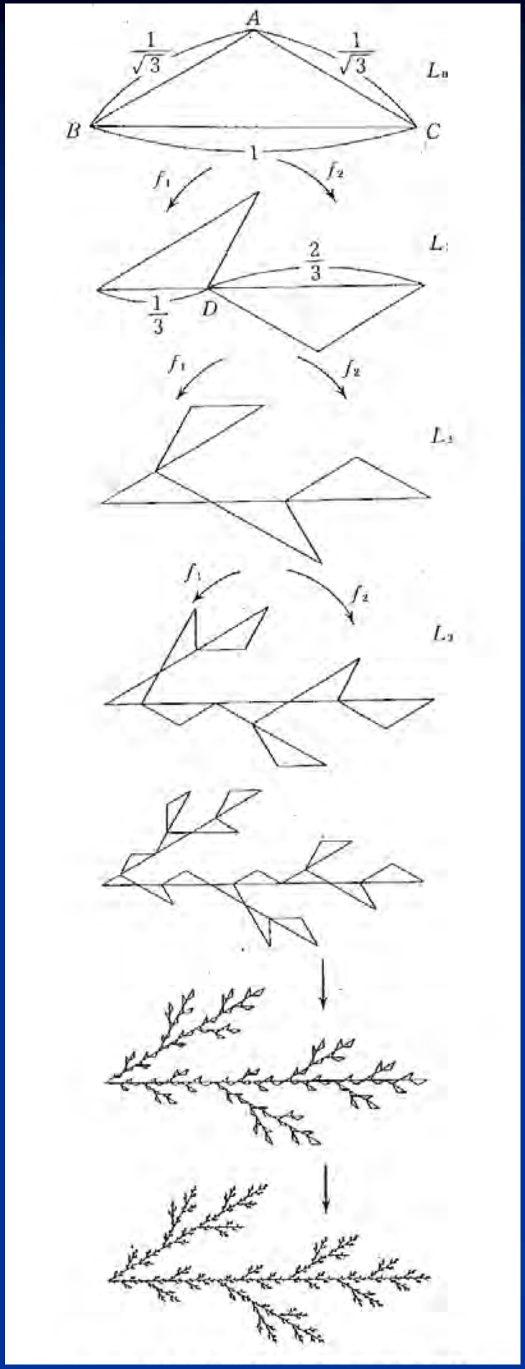
積分$\int \cdot (dx)^h$ = 有限値(測度) を与える h

↔ D = h (* 整数とは限らない)

“フラクタル次元”

e.g. Cantor集合 $2=3^d$ → $d = \log 2/\log 3 = 0.6309\ldots < 1$

Koch曲線 $2=(\sqrt{3})^d$ → $d = \log 4/\log 3 = 1.26\ldots > 1$



Koch曲線の仲間

“ スギの葉 ” 次元 : d

$(1/\sqrt{3})^d+(2/3)^d=1$ の解 → $1<d<2$

複素縮小写像（カオス過程）についての不変集合 K ：⇒2次元上の自己相似図形

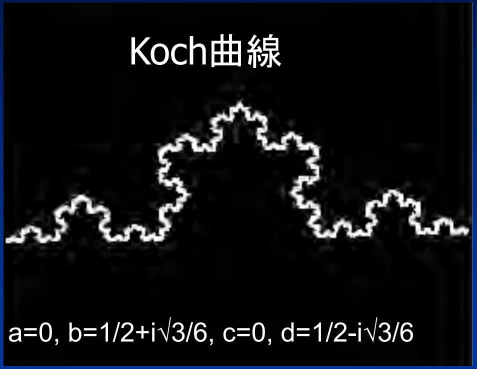
（Koch曲線の同族：1<次元<2 ）

$$\begin{cases} f(z)=az+bz^* & \text{, where } z=x+iy \\ g(z)=c(z-1)+d(z^*-1)+1 \end{cases}$$

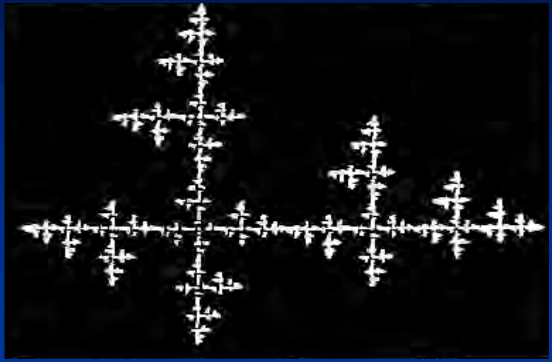
$$z_{n+1}= f(z_n)\cup g(z_n)$$

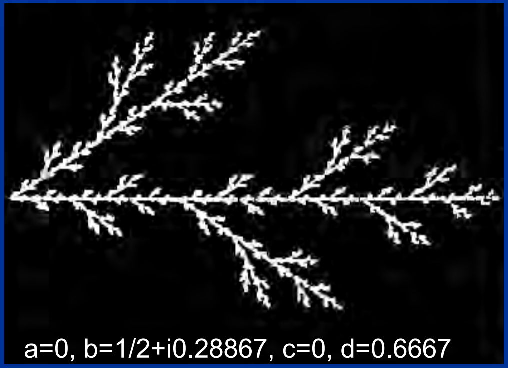
$K=f(K)\cup g(K)$：不変集合

self-affine集合（線型写像）

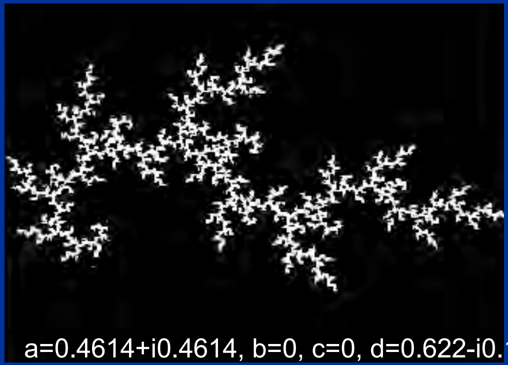


a=0, b=1/2+i√3/6, c=0, d=1/2-i√3/6

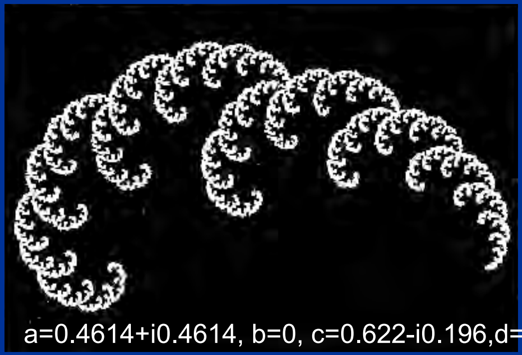




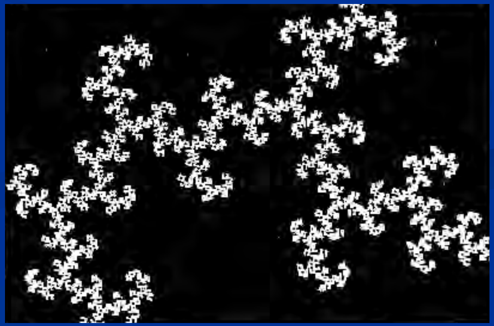
a=0, b=1/2+i0.28867, c=0, d=0.6667



a=0.4614+i0.4614, b=0, c=0, d=0.622-i0.196



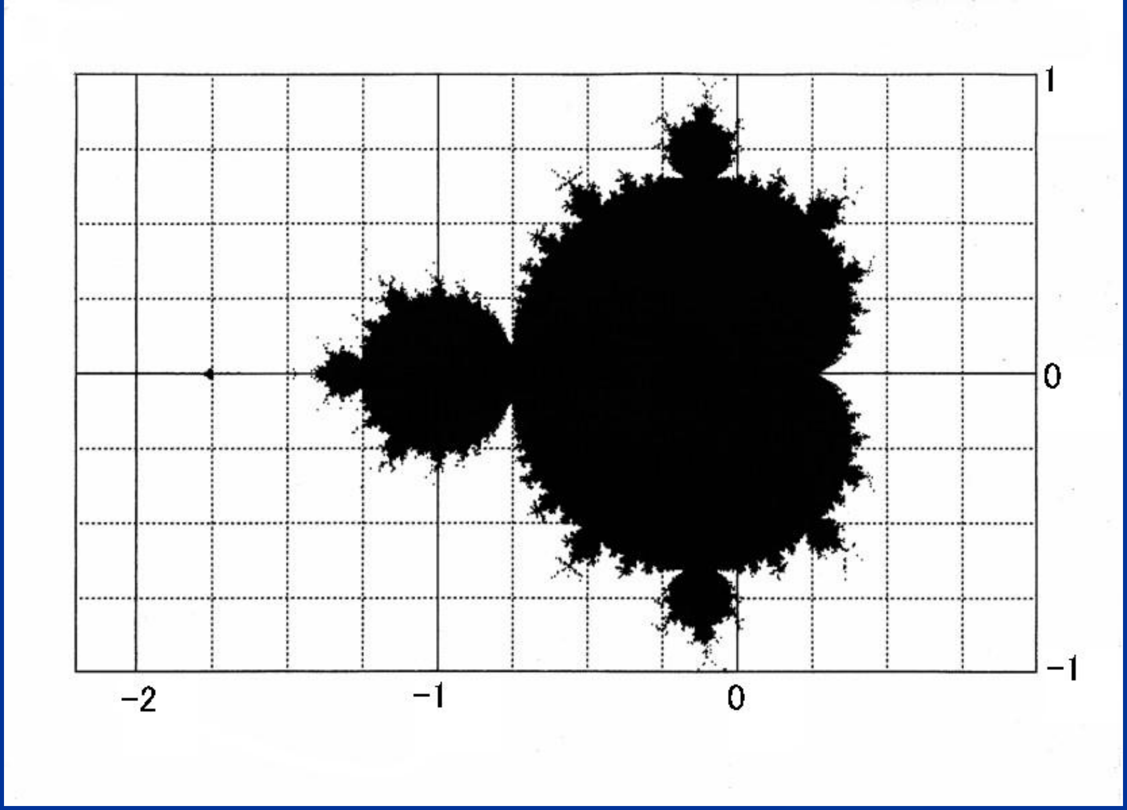
a=0.4614+i0.4614, b=0, c=0.622-i0.196,d=0



Manderbrot集合

複素非線形写像 $Z_{n+1}=Z_n^2+C$, $Z_0=0$（初期値）；$Z=x+iy$

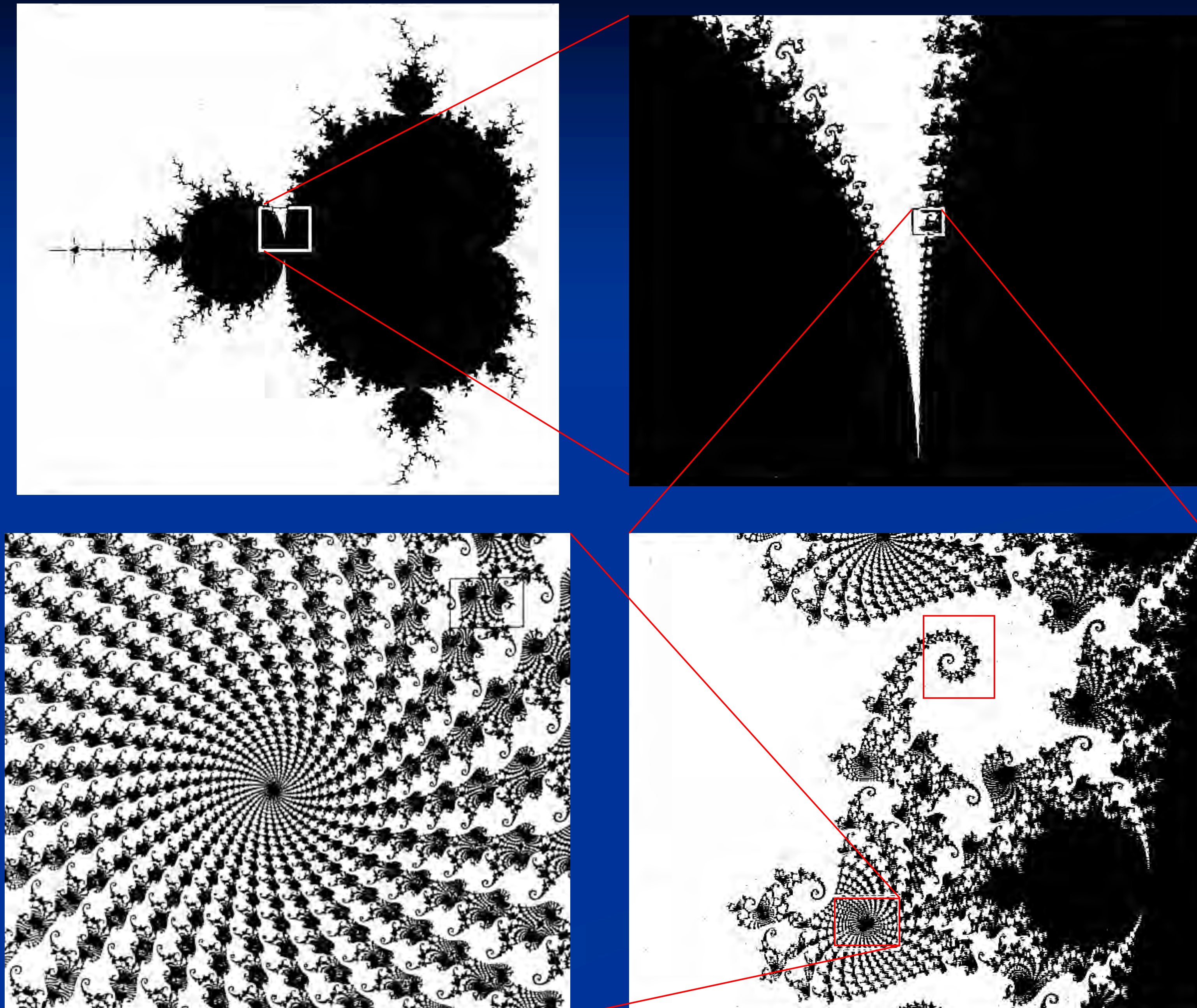
Manderbrot集合： $Z_0 \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_3 \rightarrow \cdots$
が発散しないような 複素数 C の集合



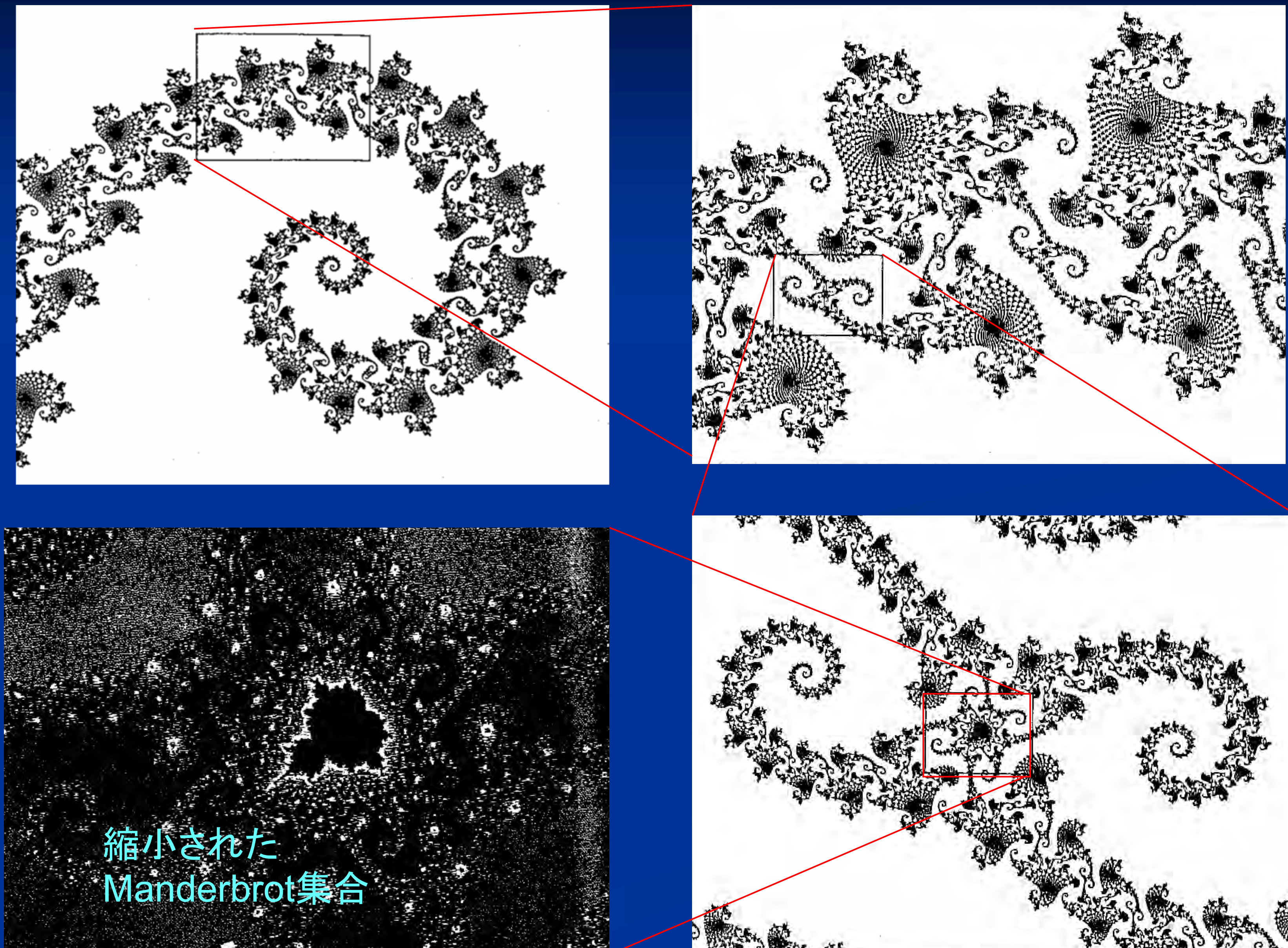
- 黒い領域の外：発散
- 〃　の中：収束
- 境界‘曲線’：カオス写像（自己相似図形）

- Manderbrot集合は連結集合である。
- 境界‘曲線’の Hausdorff次元 h=2 !!

複雑な自己相似性



複雑な自己相似性



相転移(臨界現象)/多体系の協同現象
Phase Transition(Critical Phenomena)/ Collective Effect of Many-body System

物理現象の例

- 固体 ⇔ 液体 ⇔ 気体 の相変化
- 自発磁化: 強磁性体金属は極低温で磁石になる。
- 超伝導 : 極低温で電気伝導度がゼロになる。
- 中性子星の形成: ボーズ･アインシュタイン凝縮
- 膨張宇宙の進化:

  場の理論における真空の相転移による相互作用の進化

・・・・

生物現象 : 反応、形態形成、進化、地球環境変化…

社会現象 : パニック、群集心理、経済恐慌、…

にも適用可能？

強磁性体の磁化現象：強磁性体金属は極低温で磁石になる。

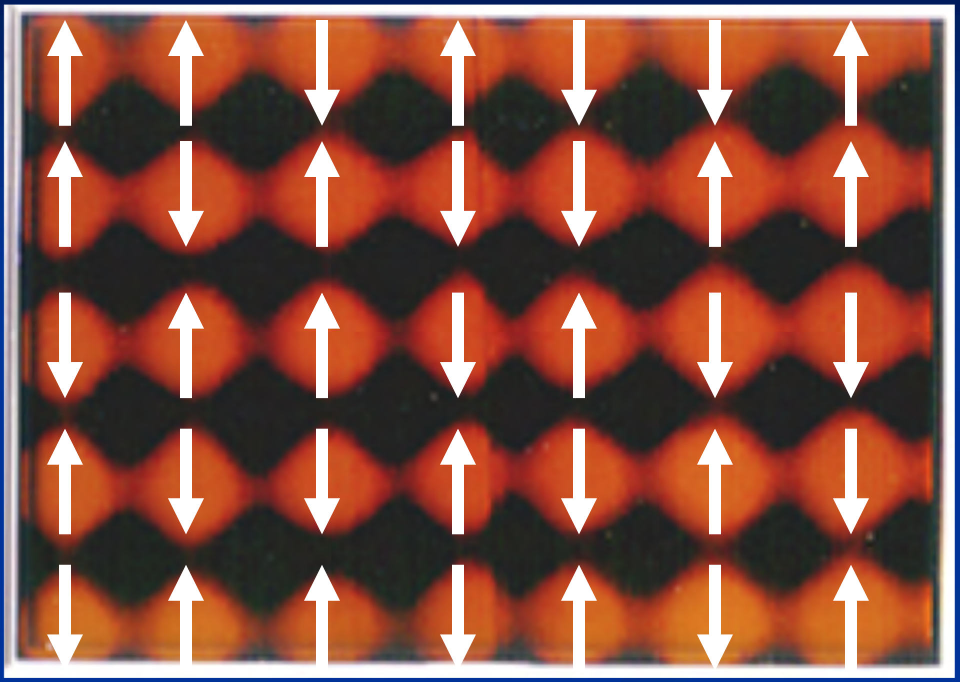
金属：単原子分子の配列

↕

小さな棒磁石 N S ↑

スピンモデル（Spin Model）

Ising Model { 上向き ↑ / 下向き ↓



■ 空間にスピンが配列し、隣同士のスピンとだけ相互作用する.

各スピンはそれぞれ上か下かに向く。⇒
- ・スピンの向きがバラバラ ＝ 磁化しない。
- ・スピンの向きが揃う ＝ 磁化する。（磁石）

空間にスピンが配列し、隣のスピンとだけ相互作用する。

Ising Model

上向き ↑

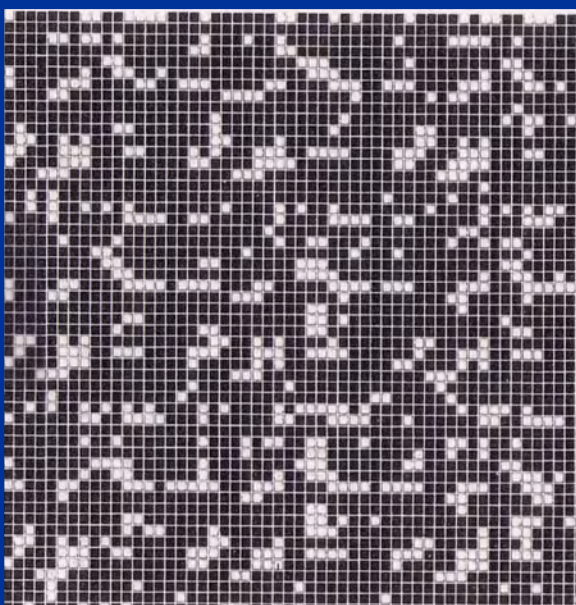
下向き ↓

並んだ2つのスピンは
揃う方がエネルギーが低い。

スピンの向きは温度に
よって揺らぐ。

巨視的様相はどうなるか？

$T < T_C$ （磁化）
低温 :スピンの向きが揃う.



一様（周期的）

$T = T_C$
相転移点（臨界温度）

様々なスケールが共存（非周期的）
スケーリング則 ： 自己相似的

$T > T_C$
高温 ： スピンの向きはバラバラ

ランダム

Isingモデル（統計力学）

- スピン変数：σ= +1（ ↑）, -1（ ↓）
- ハミルトニアン／エネルギー：$E = -\sum_{<ij>} J\sigma_i\sigma_j$ ， J > 0 強磁性体

最近接相互作用
（隣のスピンとだけ相互作用する。）

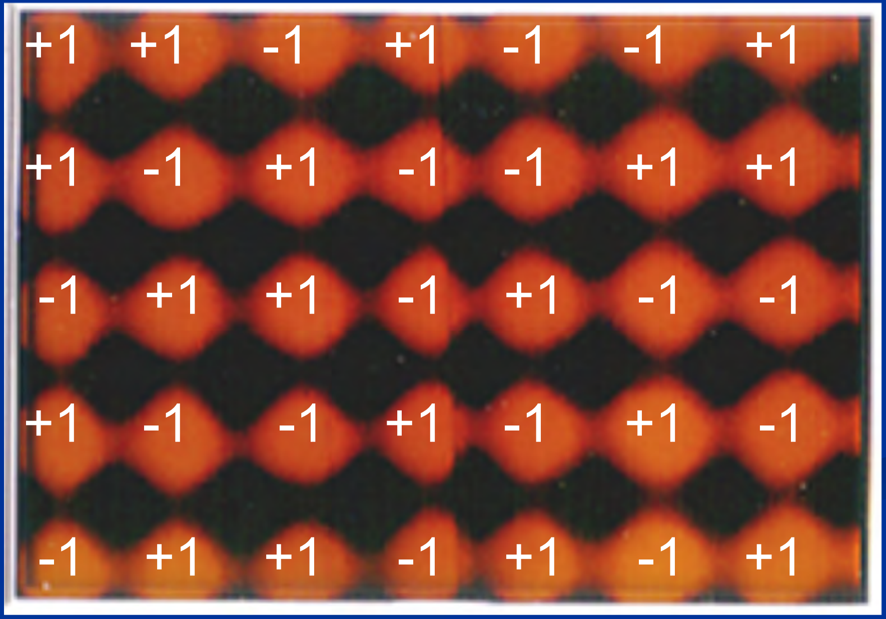
- 温度 T で, ある配位が出現する確率：$\propto \exp(-E/kT)$ （カノニカル分布）

磁化：$M=\sum\langle\sigma\rangle/N$ 平均値

$$\langle\sigma\rangle=\frac{\Sigma\sigma\exp(-E/kT)}{\Sigma\exp(-E/kT)}$$

◆ モンテカルロ シミュレーション

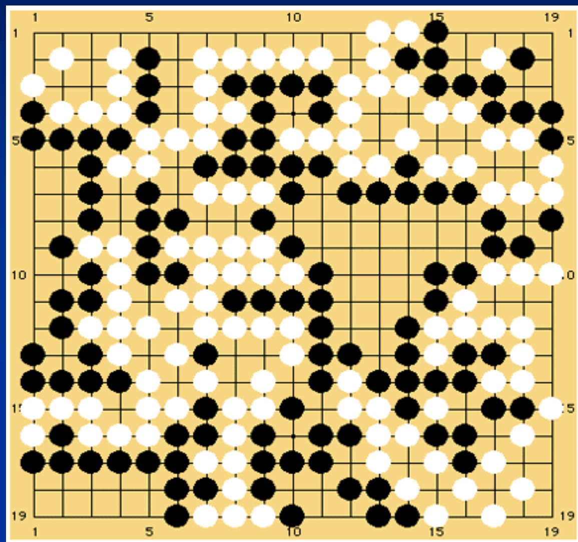
温度Tを与えて、カノニカル分布に従うたくさんの配位のセット（アンサンブル）を作り、σの期待値を計算する。

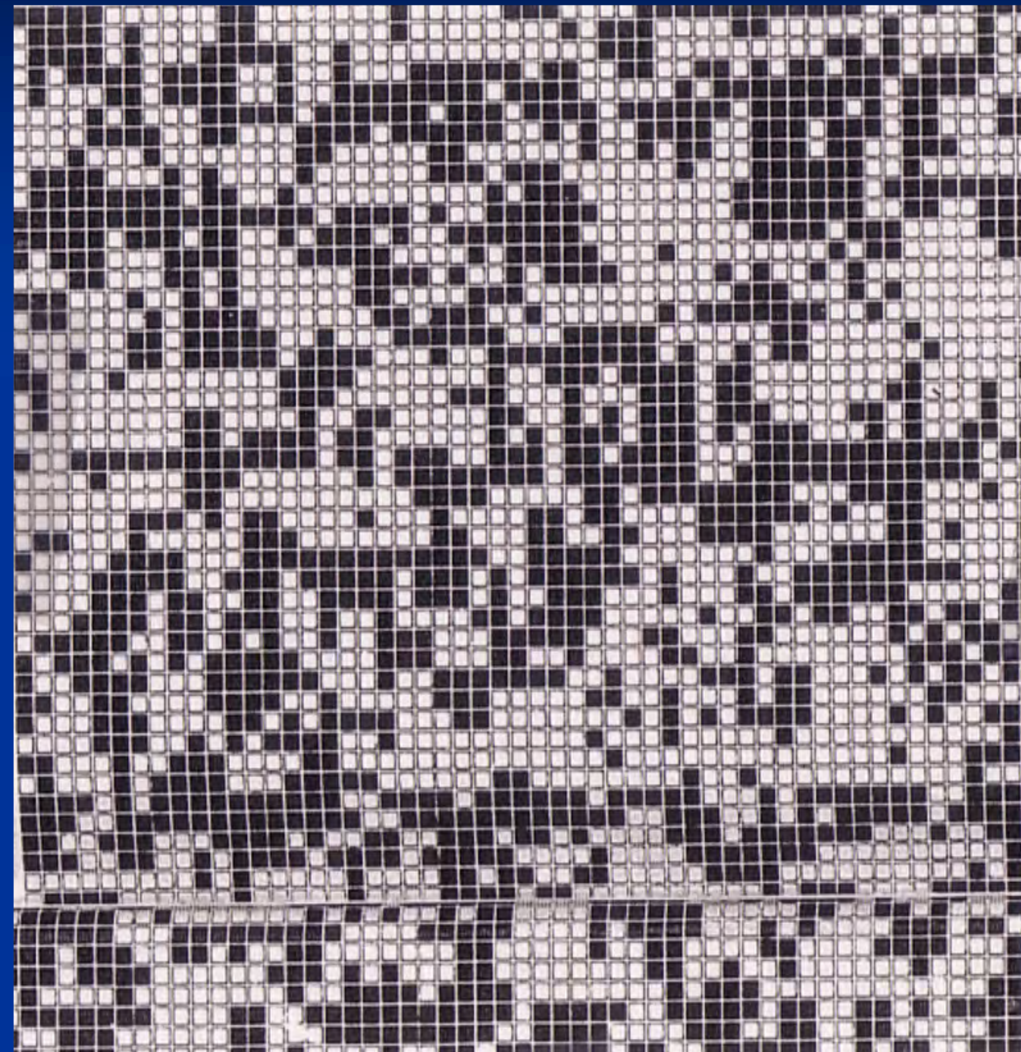


1つの配位

［動力学的に似たシステム］

囲碁は相転移点上の様相を示す





囲碁	スピンモデル
■ 白黒順番に打つ	⇔ 熱的ゆらぎ
■ 陣地取りゲーム	⇔ 磁化領域の拡大
■ 熟練者同士の好ゲームの終局図	
	⇔ 相転移点の様相

複雑 ： スケーリング則（自己相似/フラクタル）↔ 相転移

パターン形成（Pattern Formation）

現象

- 形体形成
- 群形成
- 自己複製・自己増殖
- 自己組織化（Self Organization）
- 群知能 （Group Intelligence）

現実の現象例：

- ベルソウ・ジャボチンスキー反応
- バクテリアコロニー，魚群
- 生物
- 粉粒体
- スウォーム（社会昆虫集団）：蟻，蜂

↑

数理モデル

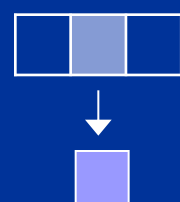
- セルオートマトン（Cellular Automaton） 離散系
  - ・1次元CA：（Wolfram）
  - ・2次元CA： Life Game （Conway）
- 散逸系の微分方程式系 非保存系
  （非平衡系の相転移現象）

1次元セル・オートマトン (Cellular Automaton)

各セルに白 ■ または黒 ■ （2状態）、が並んだ1次元配列がある.

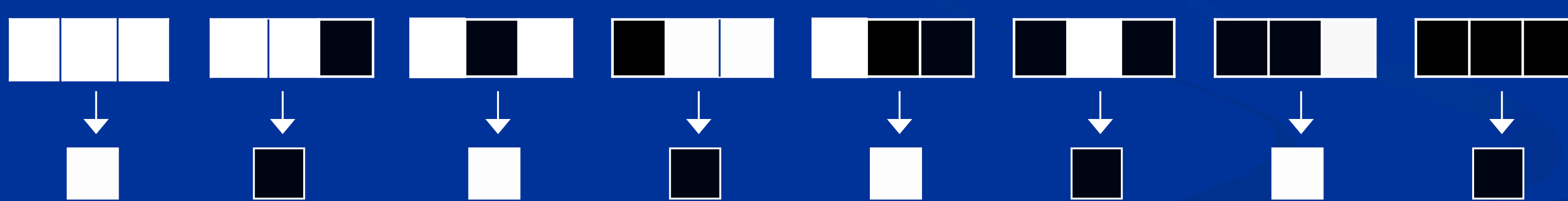
ある**局所的ルール（微視的相互作用）**により、時間ステップごとに配列は変化する.

- 2状態3近傍 CA ：



ルール： 3つ並んだセルの状態から真ん中にあるセルの次のステップの状態を決める.

遷移ルールの例



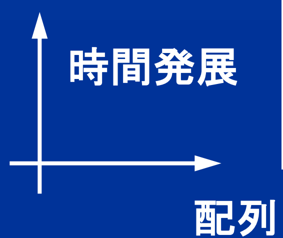
すべてのルールの数＝ 2^{2^3} = 256 通り ⟶ 256通りのCAモデル(Wolfram)

CAモデルの振る舞いによる分類

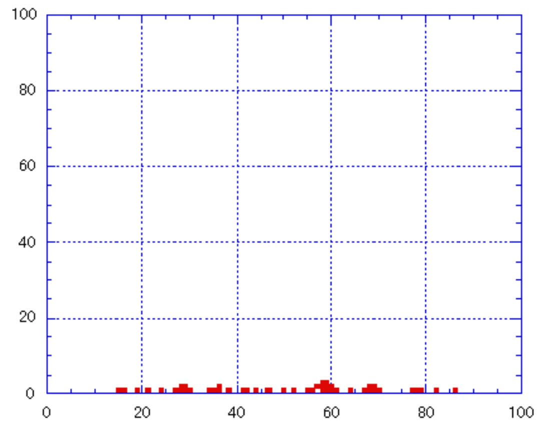
（膨大な種類のCAモデルを4つのクラスに分ける。by Langton）

- 2状態 3近傍のCAモデル ： $2^{2^{3}}$ = 256 通り
  - クラス1 ： 定常（安定/消滅）
  - クラス2 ： 周期的
  - クラス3 ： カオス的
- 4状態 5近傍のCAモデル ： $4^{4^{5}}$ = 1099511627776 通り
  - クラス4 ：“ 複雑 ” な振る舞い（Edge of Chaos） の出現

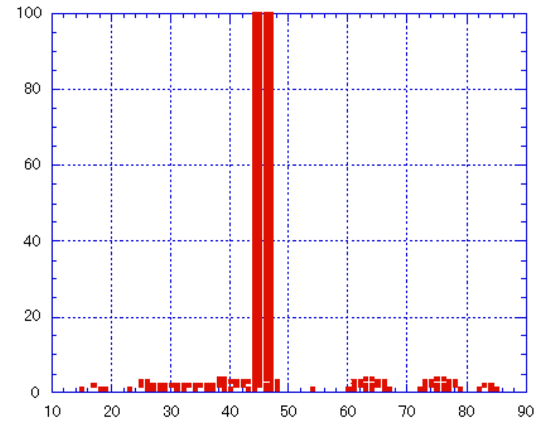
1次元CAの分類



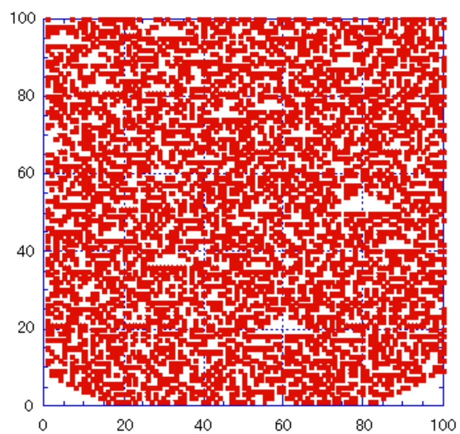
Class-1 ： 定常（消滅）



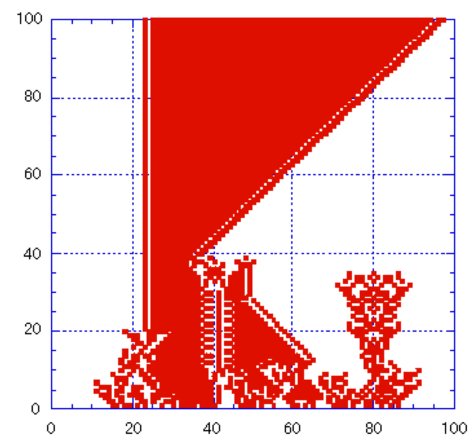
Class-2 ： 周期的



Class-3 ： カオス（スケーリング）



Class-4 ： “複雑”

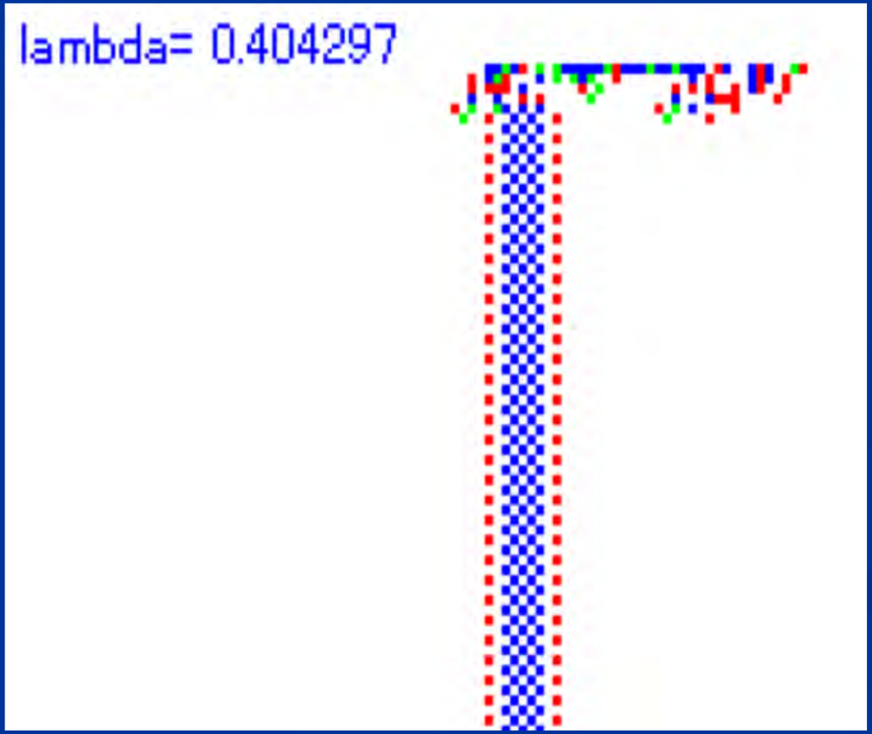


CAの振る舞いの例

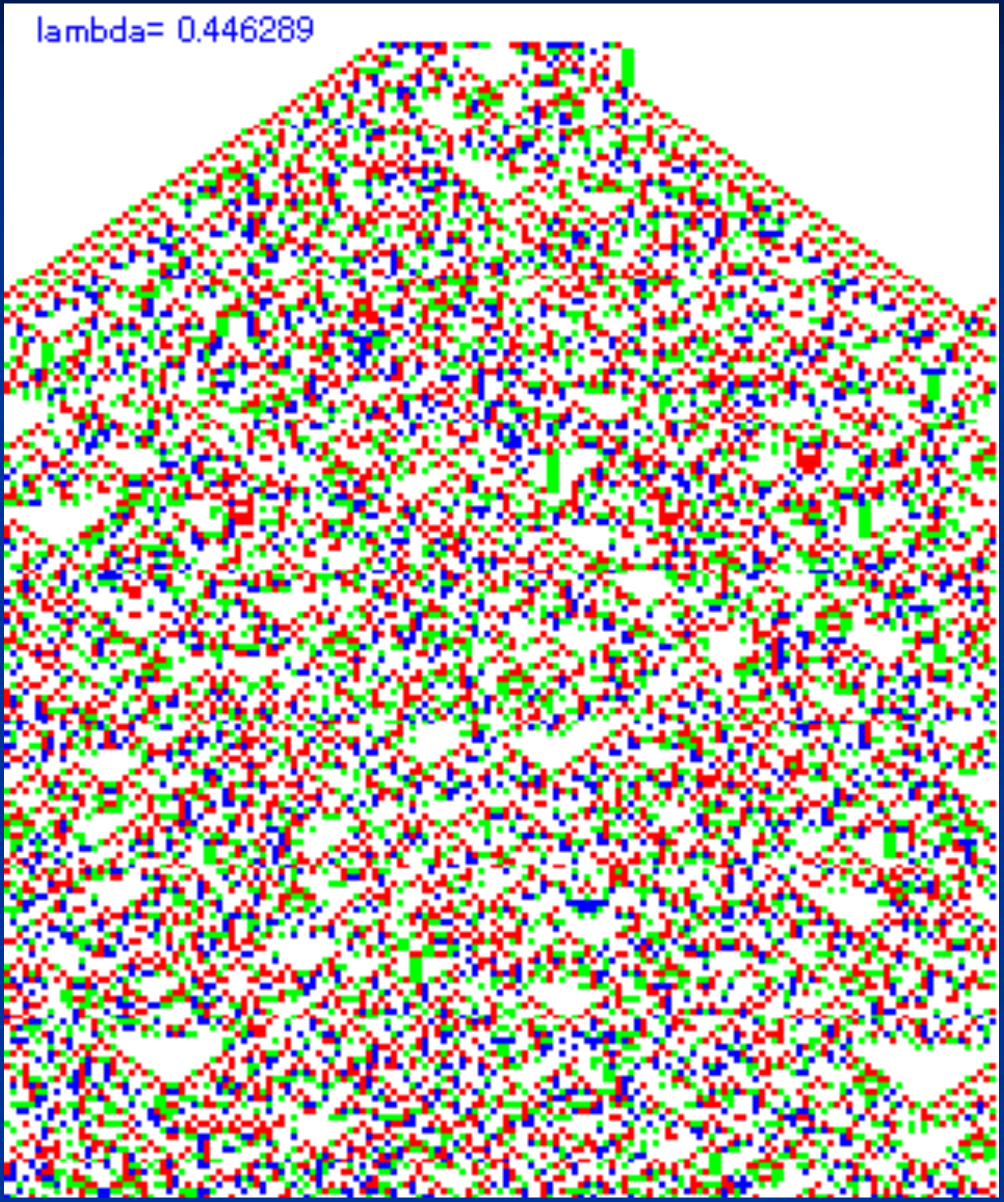
4状態 ■ ■ ■ ■ 5近傍のCA

クラス１　：　すぐに真っ白になる.

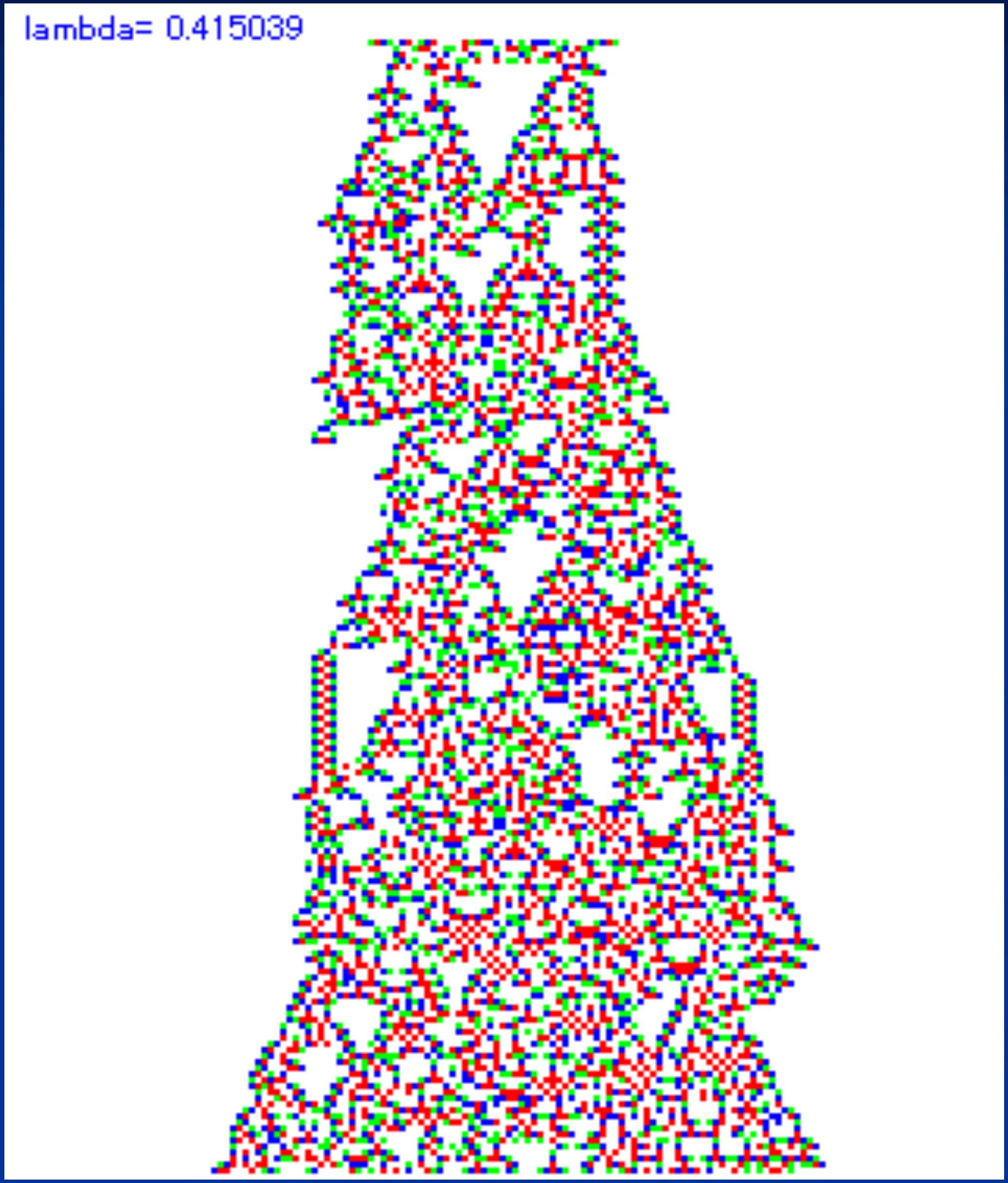
クラス２　：　しばらくして周期的になる.



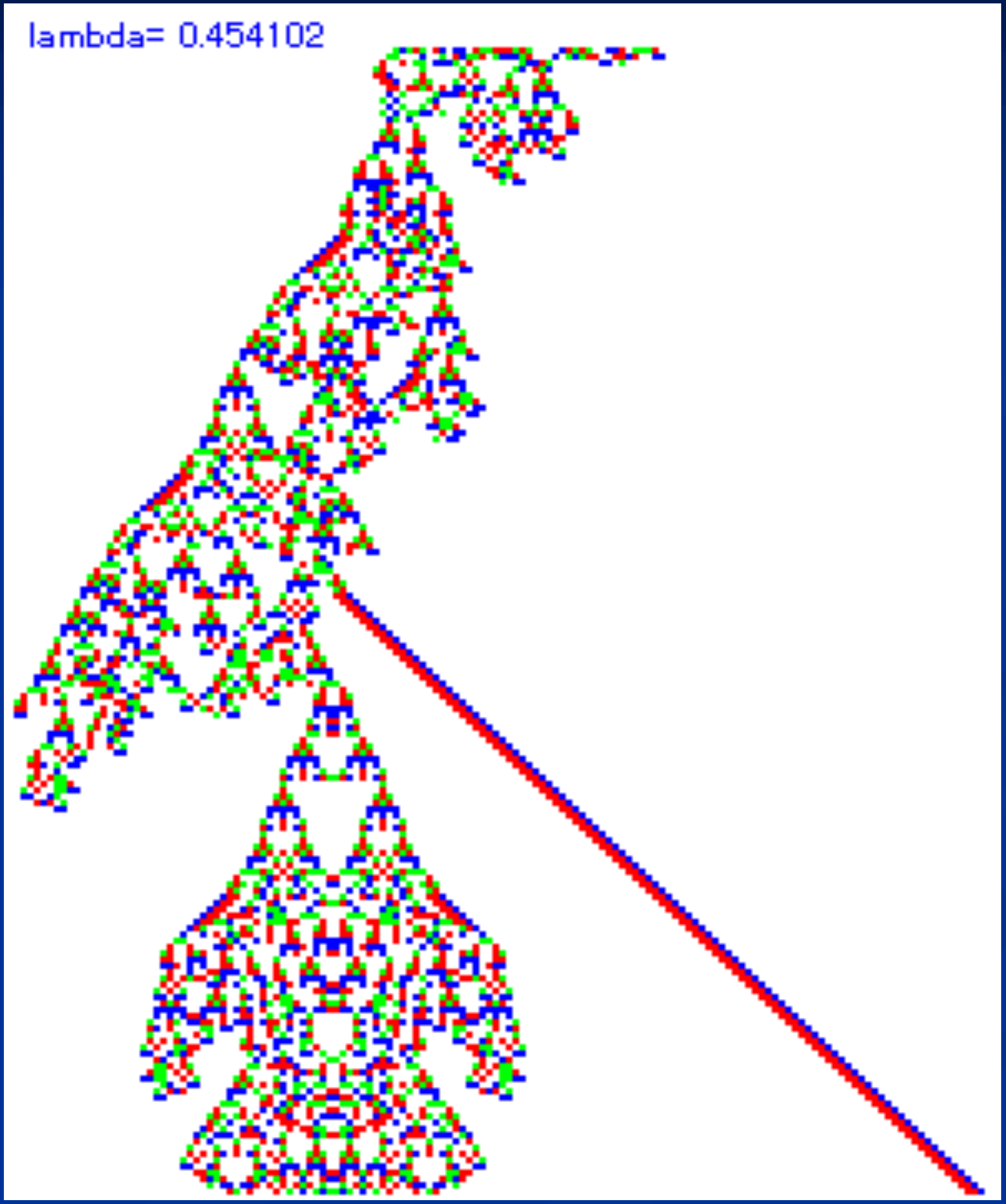
クラス３　:　カオス的な振る舞い



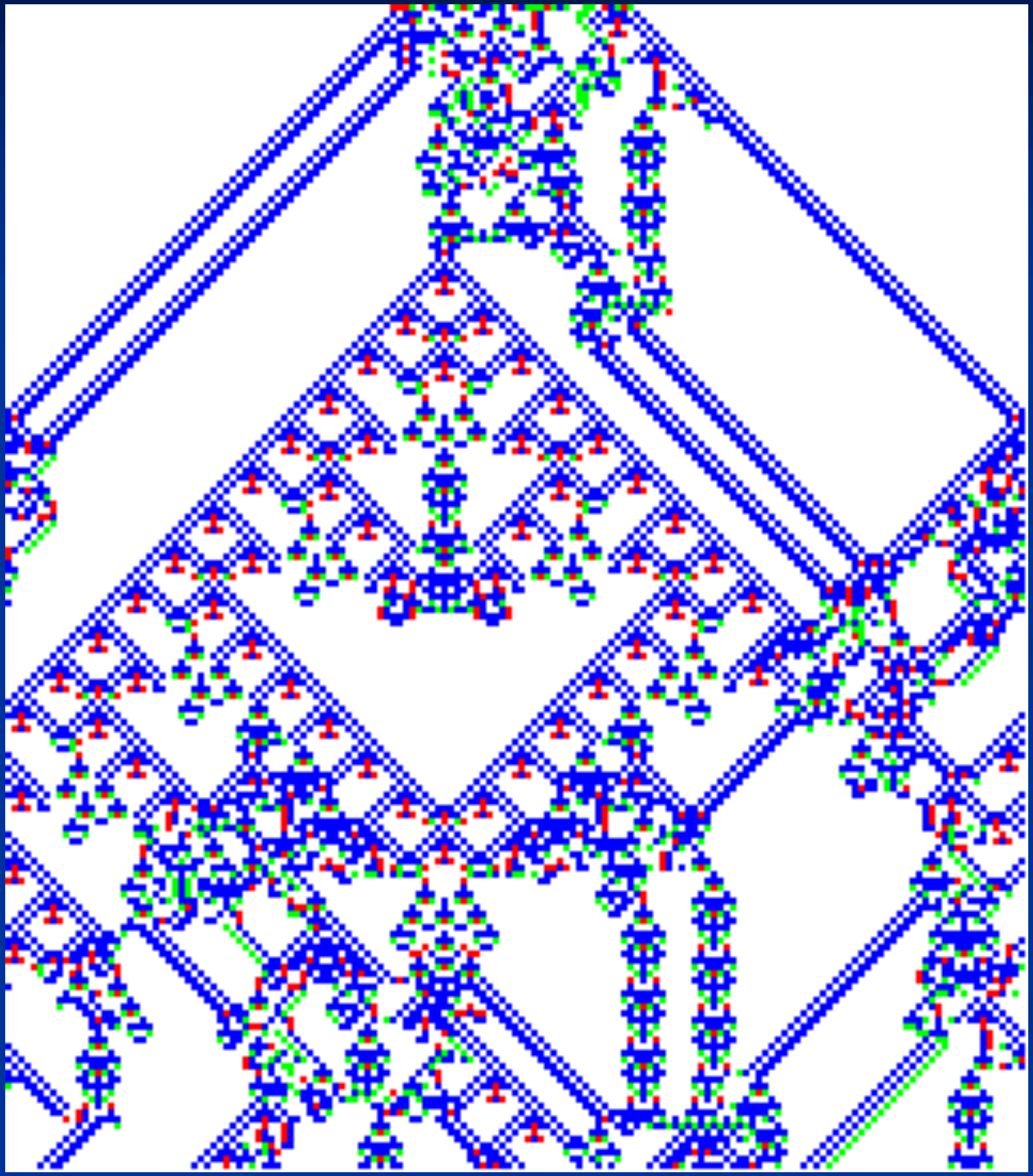
クラス４ ：“ 複雑 ”な振る舞い



クラス４　：“ 複雑 ”な振る舞い



クラス４ ： “複雑”な振る舞い

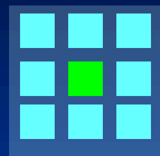


遷移規則によるクラスの出現比率

型（状態数/近傍数）	配列型（2/3）	合計型（2/3）	合計型（2/5）	合計型（2/7）	合計型（3/3）
クラス1	0.09	0.26	0.19	0.13	0.09
クラス2	0.75	0.37	0.19	0.14	0.34
クラス3	0.16	0.37	0.50	0.64	0.48
クラス4	0.00	0.00	0.12	0.09	0.09

- クラス4の様相の出現比率は、0.1程度で、少ない。
- クラス3の様相の出現比率が、最も大きい。
- 様相のクラスは初期状態には依らない。

Life Game（J.H. Conway 1970）：２次元CA



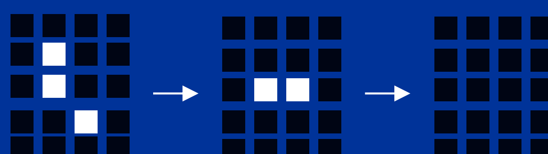
各セルは、□（生）か■（死）の2状態。

推移規則	8-近傍セルの□の個数	元状態	推移後
● ［生存］	2、3個	□ →	□
● ［死滅］	1個以下か4個以上	□ →	■
● ［生成］	3個	■ →	□
●	3個以外	■ →	■

周囲に存在するセル（細胞）が、ある程度の数だけ存在すれば生存を続け、過密・過疎なら死滅し、最適な数のとき誕生する。

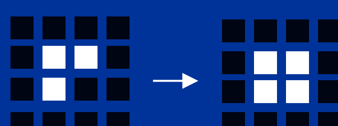
［生物繁殖の妥当なルール］

例1）



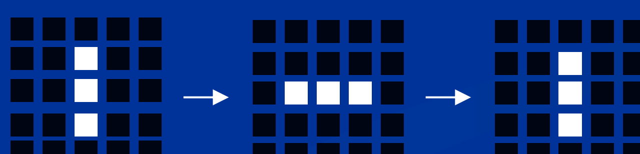
（死滅）定常

例2）



（安定）定常

例3）



周期的

1-3セル.dat

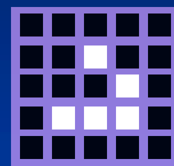
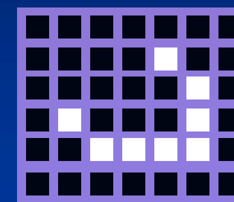
4セル.dat

5セル.dat

初期状態が単純でも大きく発展する。

重要なパターンの発見

■ 移動するパターン（何周期かで形が元に戻り位置を変える。）

・グライダー： 　　・宇宙船  ･･･

■ 生存セルを際限なく増殖していくパターン

・**グライダー砲**：周期的にグライダーを生成する。

↓

● **チューリング機械**（「**論理**」で可能な事はすべて実現できる万能計算機）

をシミュレートできる可能性を与える !!（グライダーを単位パルスとして使う）

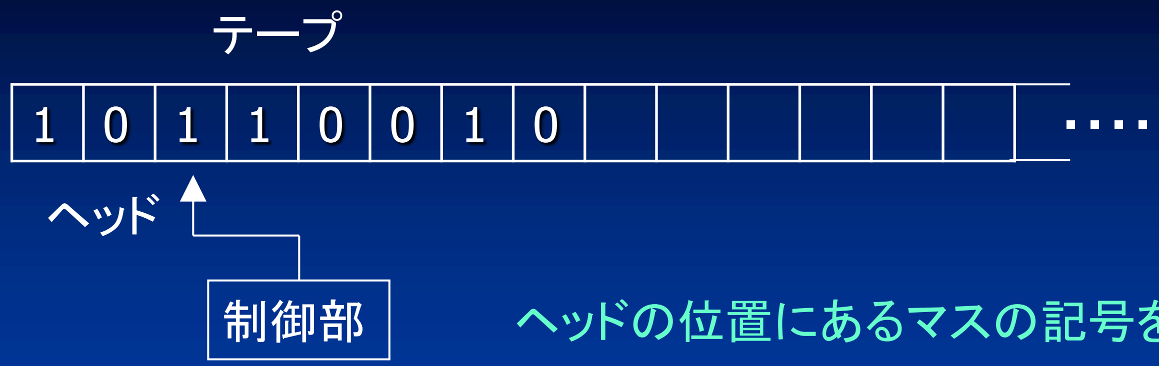
↓ ← e.g.“自己複製”のしくみが「論理」的ならば

● **自己複製機械（オートマトン）を実現できる。**

（生物に特徴的な性質を機械で創造する。 von. Neumann）

チューリング機械（Turing Machine）

構造：



ヘッドの位置にあるマスの記号を書き変える。

論理計算　入力：01011011100・・・（0と1の並び）　→　出力：10010110101・・・（0と1の並び）'

チューリング機械の機能：

制御部の状態：Q　→
テープの1マスに書かれた記号：A　→

制御部

→ 制御部の状態：Q
→ テープの1マスに書かれた記号：A
→ ヘッドの移動：D

$$Q \times A \rightarrow Q \times A \times D$$

$$Q=\{q_0,q_1,q_2,\ldots\},\ A=\{0,1,b\},\ D=\{+,-,\pm\}$$

チューリングマシン（TM）の本体：制御部

＝ 関数（mapping）f のセット　$f : Q \times A \to Q \times A \times D$,

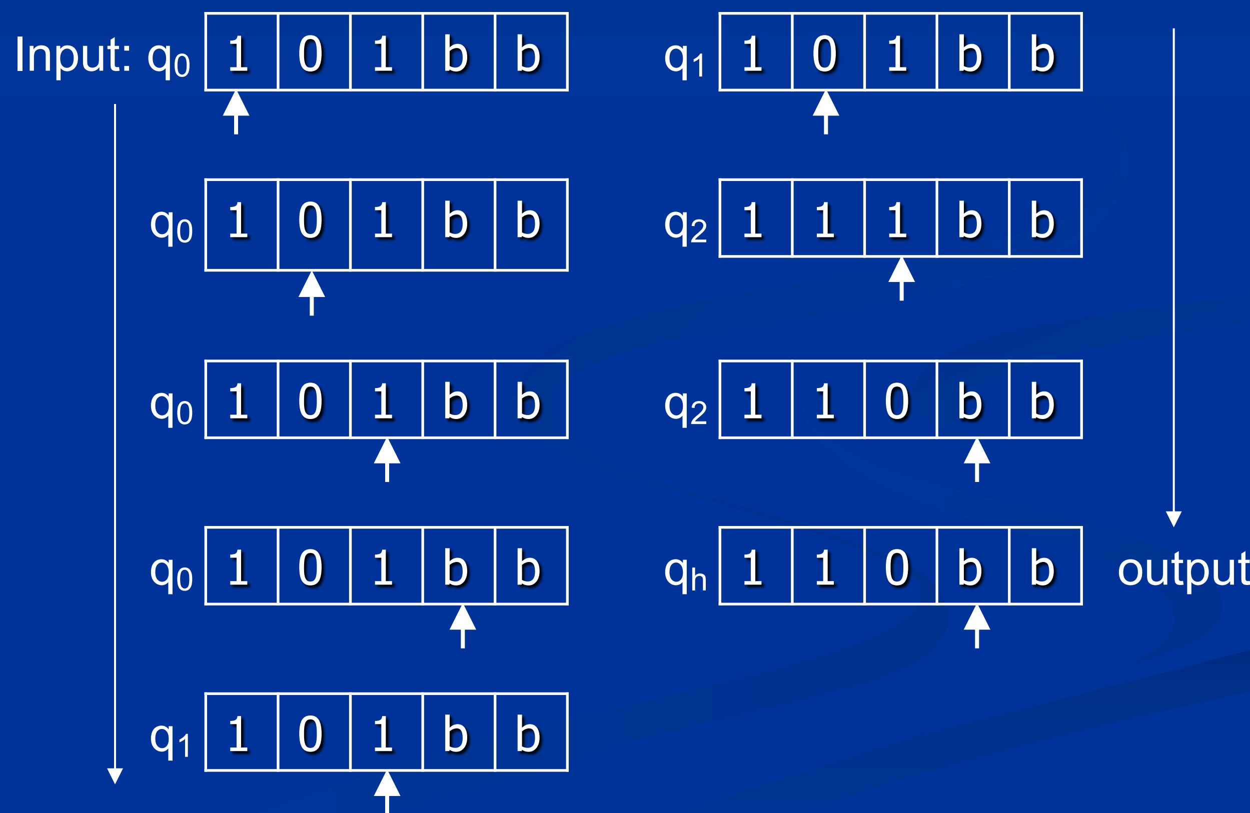
where　$Q=\{q_0,q_1,q_2,\dots\}$, $A=\{0,1,b\}$, $D=\{+,-,\pm\}$

q_h: 停止状態　　空　　右,左,止

例）+1 の計算をするTM

$f(q_0,0)=(q_0,0,+)$
$f(q_0,1)=(q_0,1,+)$
$f(q_0,b)=(q_1,b,-)$
$f(q_1,1)=(q_1,1,-)$
$f(q_1,0)=(q_2,1,+)$
$f(q_2,1)=(q_2,0,+)$
$f(q_2,b)=(q_h,b,\pm)$

e.g.　101+1=110



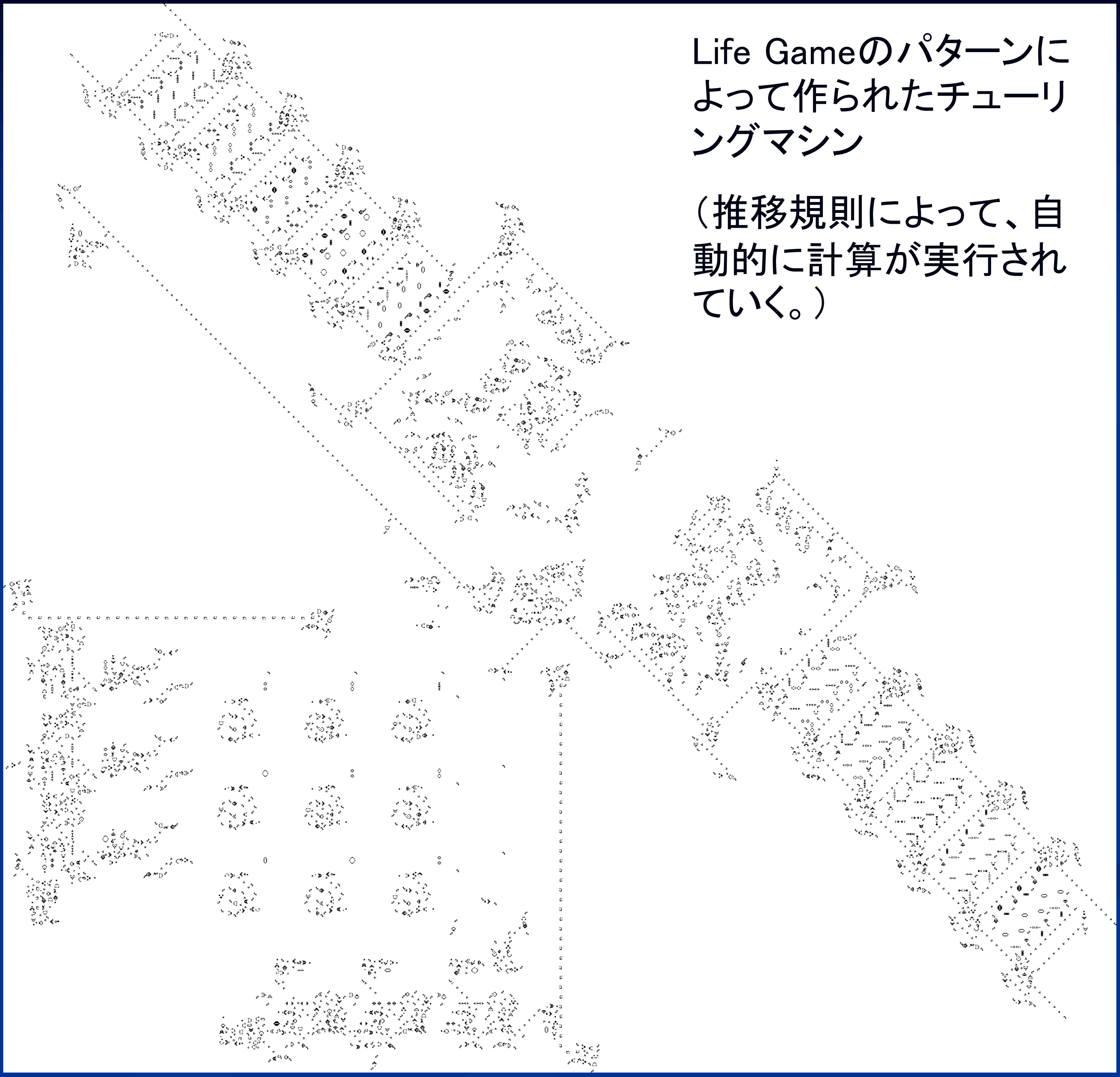
Turing Machine simulated by Life Game

↕

チューリング機械は世界のすべてを実現できる。

↓

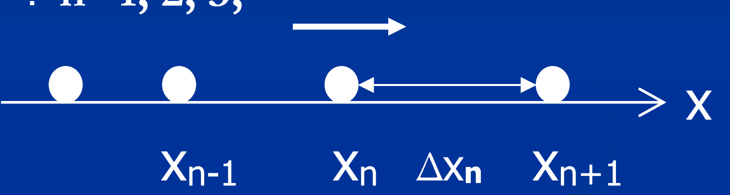
Life Game（セルオートマトン）の局所的ルールが世界を創造している!!



散逸系の微分方程式系
（非保存系・非平衡系の相転移現象）

例）**Optimal Velocity Model**（1994）: 最適速度模型

$$\frac{d^2}{dt^2}x_n(t) = a\left\{V(\Delta x_n(t)) - \frac{d}{dt}x_n(t)\right\}$$ ： n=1, 2, 3, ・・・



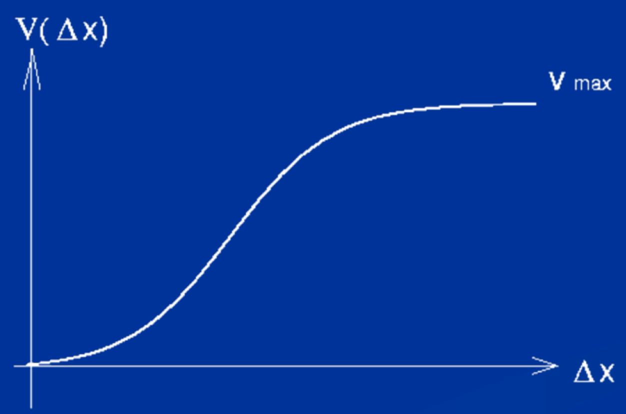
x_n : the position of the nth particle

Δx_n : the headway (distance)

a : sensitivity constant

$V(\Delta x)$: **OV-function** (→ · the optimal velocity for headway)

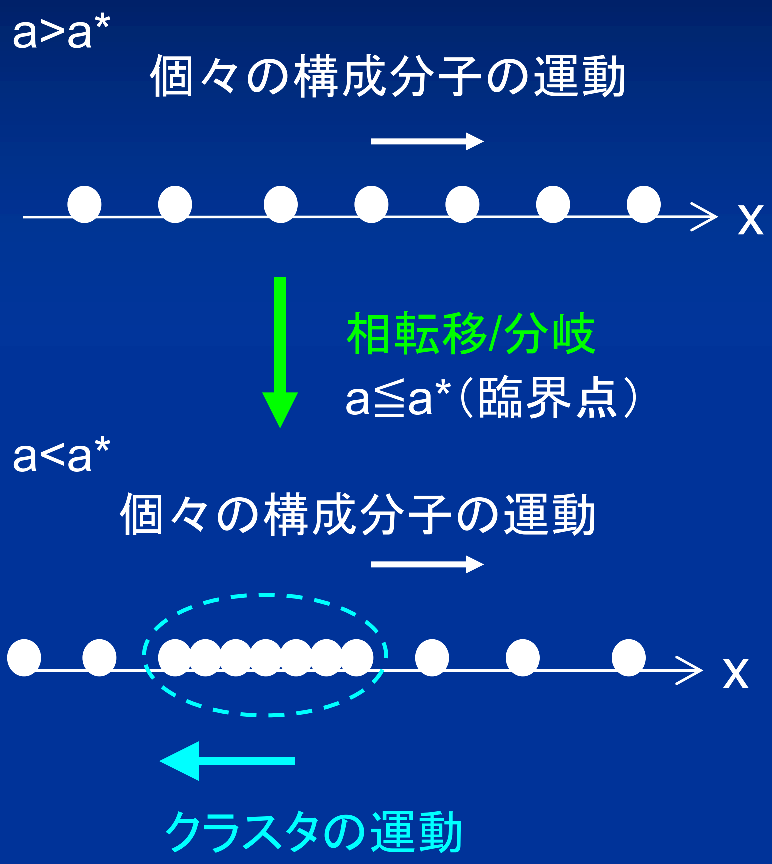
e.g. $V(\Delta x) = \tanh(\Delta x - c) +$ const.

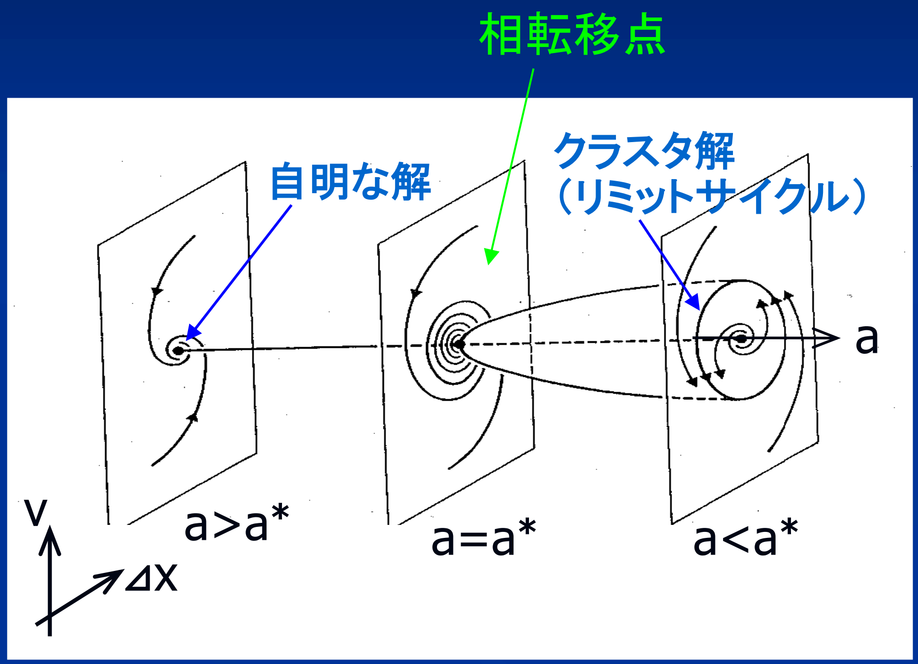


最適関数V(Δx)に緩和しようと変化する構成分子の集団運動を記述する。

散逸系クラスタ形成（非平衡相転移現象）

Cluster Formation in Dissipative System





- 自発的パターン形成
- “ホメオダイナミックス”

構成分子の非平衡な動的状態における形体形成：
固有の時間τで常に構成分子が入れ替わる流れにより、
巨視的クラスタが安定に形成され、固有の運動をする。

マクロの様相の種類と現象例

様々な世界	定常(消滅): convergence	周期的: periodic	“複雑”: complex	カオス / ランダム(乱雑): chaos /random
CA	クラス1	クラス2	クラス4	クラス3
数	有理数		無理数(超越数/代数的数)	
無限	離散(デジタル)		連続(アナログ)	
計算/論理(情報)	アルゴリズムの存在		決定不能問題	無意味な言語配列
力学	1体(自由運動)	2体		3体
力学系	秩序			カオス　無秩序
微分方程式系	可積分	可積分ソリトン		積分不可能
多体系物理	平衡系		相転移	非平衡系/散逸系
			自己組織化/形態形成	
自然	物質（死）		生命：代謝 自己複製 進化	
生態系/生物集団			群知能	
社会	孤立社会		経済現象 情報社会	